



BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III

XXXIV

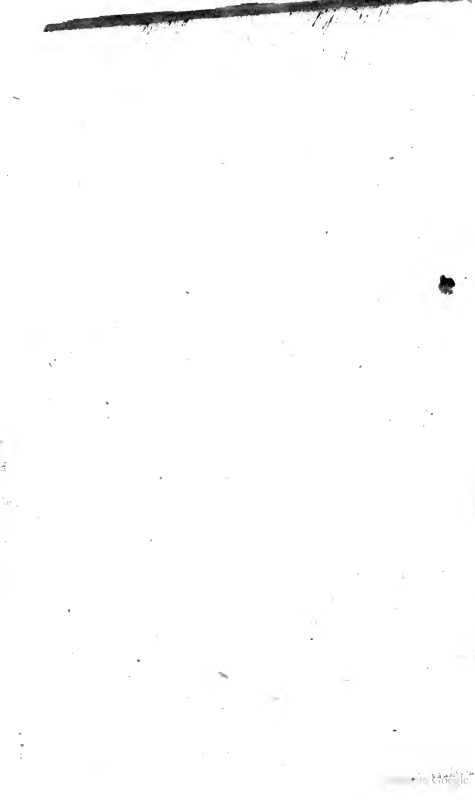
D

106

NAPOLI



34
G
51



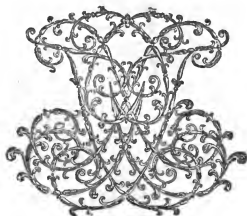
INSTITUZIONI GEOMETRICHE

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.



IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCKXXXI.







P R E F A Z I O N E.



Molti furono gli antichi Autori, che in diverse maniere proposero già gli Elementi di Geometria, cioè Ippocrate Chio, Leonzio, Eudossio Gnidio, Teudio Magnete, e più abbondantemente de' mentovati Ermodoro Colofonio, vinto però anch' esso, e di gran lunga superato da Euclide, il quale con miglior metodo, con maggior chiarezza, e con più esatte dimostrazioni degli altri gli distese; donde furono abbandonate, e si perdettero le Istituzioni matematiche de' sopradetti Scrittori, e ciascuno s' appigliò a quelle di Euclide, le quali sono state

§ 2

fem-

sempre meritamente applaudite da tutti i Matematici antichi, e moderni.

Sono passati circa a venti secoli, da che furono pubblicati gli Elementi di Euclide, ed in questo tempo da diversi illustri, e celebri Geometri molte altre famose speculazioni sono state ritrovate, che hanno somministrato agl' intendenti non piccolo campo di far nuove Istituzioni Elementari più compendiose, corredate di Teoremi ancora più generali di quelli di Euclide, ed arricchite di Proposizioni da esso non dimostrate.

E quantunque interrogato una volta l'istesso Euclide dal Re Tolomeo, se potesse trovarsi una via più compendiosa di quella, che era proposta ne' libri de' suoi Elementi, rispondesse, che non poteva assegnarsi nè più nobile, nè più regia di quella da lui inventata; non ostante sono di parere, che ciò potesse per avventura verificarsi in quel tempo, ma non già dopo il decorso di due mila anni, nel qual tempo sendo state fatte grandissime scoperte in questa sublimissima Scienza, non vi ha dubbio, che non possa essere stato immaginato, e disteso un metodo più facile, più breve, e forse ancora più comodo di quello tenuto da Euclide. Abba-
stan-

stanza vien ciò comprovato dalle molte Istituzioni Geometriche divulgate di tempo in tempo, e proposte da varj dottissimi Matematici, tra' quali si possono annoverare il Borelli, il Fabri, l' Arnaldo, il Duca di Burgundia, il Pardies, lo Sturmio, il Guarini, il Marchetti, il Croufaz, il Wolfio, ed altri, le quali sono state ricevute sempre con somma lode, ed applauso da tutta la Repubblica Letteraria. Laonde io pure mosso dal loro esempio, ho determinato di far pubbliche queste mie nuove Istituzioni, lusingandomi, che debbano anch' esse incontrare l' approvazione, e l' aggradimento de' gl'intendenti.

Per non prolungarle di soverchio, non ho posto in esse tutte le nuove proprietà geometriche, che da me sono state ritrovate, ma quelle solo, che ho creduto più necessarie agli studenti scolari, non potendo nè pur io in questa troppo grave età, e con la mente alquanto affaticata attender di proposito a raccogliere tutte insieme da' miei scritti, e disporle con ordine bene adattato a questi Elementi.

Sembrerà forse a taluno cosa nuova l' aver io posti gli Assiomi avanti alle Definizioni, alteran-

do in cotal guisa il metodo d' Euclide; ma siccome nelli Scolj da me addotti alle Definizioni, mi servo di questi Affiomi, perciò ho stimato bene di servirmi di questa disposizione, che voglio sperare non debba essermi disapprovata.

Ho diviso queste Istituzioni in tre parti; la prima riguarda la materia trattata da Euclide ne' primi quattro libri; la seconda concerne ciò, che dal medesimo vien dimostrato nel quinto, e nel sesto; e la terza comprende la dottrina da esso spiegata nell' undecimo, duodecimo, e decimoterzo libro.


Ciascuna di queste tre parti comprende poche Proposizioni, avendole estese con molti Corollarj ad altre asserzioni conseguentemente dimostrate. Se con tal metodo io abbia pienamente conseguito il fine da me bramato, il vedranno i cortesi Leggitori, al prudente intendimento de' quali, ed al retto giudizio de' dottissimi Matematici io totalmente mi rimetto.

1

I N S T I T U Z I O N I G E O M E T R I C H E

P A R T E P R I M A .

A S S I O M I .

I.  E cose uguali a una terza sono uguali ancora fra loro.

II. Di due cose uguali se una è maggiore, o minore di qualche terza quantità, l'altra ancora farà maggiore, o minore di essa terza; e se una terza quantità è maggiore, o minore della prima di due altre uguali, farà parimente maggiore, o minore della seconda.

III. Ad uguali quantità aggiungendo una stessa quantità comune, o altrettante quantità, tra di loro uguali, si faranno pure esse somme uguali; e dalle uguali detraendo qualche comune porzione, o altrettante parti uguali, le residue rimangono pure tra loro uguali,

IV. Alle quantità disuguali aggiunta una comune, o altrettante uguali, si fanno pure somme disuguali; ed ancora levando dalle disuguali una stessa comune porzione, o altrettante parti tra loro uguali, le residue rimarranno pure disuguali.

V. Le quantità, che sopraposte l'una all'altra, si combaciano esattamente, senza veruno eccesso, o difetto dell'una dall'altra, sono uguali;

A

pur-

purchè non solamente il senso (che potrebbe non avvertirne il preciso adattamento) ma la ragione mostri dover ciò succedere.

VI. Il tutto è sempre maggiore di qualunque sua parte; ed è il tutto uguale a tutte le sue parti prese insieme.

VII. Se il doppio d'una quantità è maggiore, o minore, o uguale al doppio d'un'altra quantità, ancora quella prima semplice quantità sarà maggiore, minore, o uguale all'altra semplice; e lo stesso può dirsi de' tripli, o altri ugualmente moltiplici di altre semplici quantità, che secondo quelli faranno tra di loro uguali, o l'uno maggiore, o minore dell'altro, ancora queste semplici faranno uguali, o la prima maggiore, o rispettivamente minore della seconda.

VIII. Similmente le quantità doppie, o triple, o ugualmente moltiplici d'una medesima, o di altre tra di loro uguali, debbono essere quelle pure uguali tra loro.

D E F I N I Z I O N I .

TAV. I. I. *Corpo* dicefi quella quantità, che ha tre dimensioni, in lunghezza, in larghezza, e in profondità.

FIG. 1.

II. *Superficie* è l'estremità del Corpo distesa solamente in lunghezza, ed in larghezza, non in profondità.

III. *Linea* è l'estremità della superficie, che solo in lungo distendesi, senza veruna larghezza, o grossezza.

IV. *Punto* è l'estremo della linea, senza veruna estensione.

SCO-

S C O L I O I.

I. **P**Er esempio, nel dado AE stendesi la di lui mole nella lunghezza FE, nella larghezza FG, e nella profondità, o altezza FC; e questo diceſi Corpo, o ancora Solido, che ancora può avere diſuguale eſtenſione in ciaſcheduna parte, come un tronco ADEFG, in cui è maggiore la lunghezza FE della lunghezza CD, la larghezza FG è maggiore di CA, la profondità in CF può eſſere maggiore della profondità in BH &c. non eſſendo neceſſario, che il corpo abbia per qualunque verſo, in ciaſcheduna parte, una uguale eſtenſione.

FIG. 1.

FIG. 2.

II. Perchè poi da noi non ſi trova alcun corpo d' infinita grandezza, ma ſi vede ognuno terminato, conviene diſcernere quelle eſtremità, che lo limitano, oltre le quali più non ſi eſtende; e queſte ſono le Superficie di eſſo Corpo, quali per eſempio ſono le facce laterali AF, FD, DH, HA, e la ſuprema BC, e l' inſima FH, le quali hanno beſi eſtenſione in lunghezza, e in larghezza, ma non in profondità, non avendo groſſezza alcuna; altrimenti non ſarebbero puri termini del corpo, ma parti del medefimo.

III. Inoltre, perchè le ſteſſe ſuperficie non ſono infinitamente eſteſe, ma limitate, debbono avere le loro eſtremità, che ſono le Linee; come la ſuperficie AD vedefi limitata dalla parte deſtra, e dalla ſiniſtra, con le linee BD, AC, ſiccome delle parti d' avanti, e di dietro con le linee CD, AB, nelle quali ritrovafi la ſola eſtenſione in lunghezza, ma non veruna larghezza, altrimenti ſarebbero

FIG. 3.

ancor esse parti di superficie, e non puri confini di essa.

FIG. 4.

IV. Finalmente, non essendo qualunque linea prolungata in infinito, dovrà essere terminata, e non immensa, le di cui estremità saranno li Punti, d'onde principiano, e dove finiscono: come nella linea AB li due termini sono i punti A, B; e nella linea CD sono gli estremi punti C, D, ne quali non deve trovarsi specie veruna di estensione, perchè se avessero qualunque piccola lunghezza, sarebbero lineette, e non termini di esse linee.

V. Si potrebbe però da taluno considerare, che in una superficie globosa, benchè non sia infinita, non possono accennarsi le linee, che sono i suoi termini; ed ancora in una linea rotonda, che ritorni in se stessa, quantunque finita, non potervi assegnare i punti, da cui sia terminata. Al che basterà rispondere, che in qualunque sito segandosi il corpo di una palla, verrà segata ancora la superficie globosa di essa con una linea curva, la quale sarà il termine di quelle parti di superficie, che vengono divise da essa; e parimente segando una superficie circondata da quella linea rotonda, si determineranno li punti, che sono termini delle parti di quella curva, che ritornava in se stessa, e che resta divisa per questo taglio della superficie in due porzioni terminate da essi punti.

D E F I N I Z I O N I.

FIG. 5.

V. Di tutte le linee, come ACB, AEB terminate negli stessi punti A, B, la più breve di tutte, che è AB, diccsi *Linea Retta*; le altre poi

poi sono *Curve*, o composte di più curve, di più rette, o di qualche retta, oppure di qualche curva connessa a quella.

VI. Di tutte le superficie, che possono terminare nelle medesime linee AC , BD , la minima di tutte $ACDB$ dicesi *Superficie Piana*; l'altre, come $CFBDA$, ovvero $AEBDHC$, sono *Curve*, o composte di più curve, o di più piane, ovvero di curve congiunte con piane.

VII. Dicesi *Figura* qualunque spazio, che da uno, o da più termini, per ogni verso, riesca circoscritto.

VIII. Quella figura, che da tre linee rette sia compresa, dicesi *Triangolo Rettilineo*.

S C O L I O II.

I. **D**ue sole rette linee non possono fare una figura, perchè o sono del tutto staccate, come AB , CD , tra le quali riesce lo spazio di quà, e di là aperto; o convengono in un solo punto F le rette EF , GF , tra le quali pure riesce lo spazio aperto dalla banda opposta al loro concorso; o pure se in due punti H , I concorrono due linee rette IH , HI , riusciranno adattate in una stessa lunghezza, senza comprendere spazio veruno, essendo l'una soprapposta all'altra, ed esattamente congruente con quella; che se si credesse andassero disgiunte, come HI , HLI , comprendenti qualche spazio, una di esse dovrà essere maggiore dell'altra, e però sarà curva; come sarà HLI , non potendo essere tanto questa, che quella linea la brevissima estensione di lunghezza fra i detti termini.

II. Bensì due linee curve ACB , AFB , ovve- FIG. 8.

ro una retta AB con la curva ACB , o ancora una sola curva $ADBC$, che ritorni in se stessa, possono fare una figura, comprendendosi tra esse lo spazio per ogni verso.

FIG. 9. III. Perchè adunque non possono due linee rette comprendere una figura, almeno tre rette linee AB , AC , CB conviene, che si connettano co' loro termini per fare una figura ABC , che dicesi Triangolo rettilineo.

FIG. 10. IV. Quanto poi alle superficie piane non possono comprendere qualche figura corporea, nè due, nè tre sole, ma quattro almeno, come accade in una Piramide $EGFD$, compresa da quattro trian-

FIG. 11. goli DEG , DGF , EGF , EDF ; imperocchè tre soli piani A , B , C , (e molto meno due soli A , B) non possono comprendere una figura corporea; ma dalle superficie curve si può benissimo, o sia una sola, o due, o tre ancora, comprendere lo spazio, onde risulterebbero le figure de' Corpi.

FIG. 12. V. Dall'essere una linea retta la più breve di tutte l'altre terminate a' medesimi punti, come si è detto nella Definizione V. è chiaro, che in qualsivoglia triangolo BAC qualunque lato BC deve essere minore della somma degli altri due AB , AC terminati agli stessi punti B , e C , tra cui giace la linea BC ; siccome ancora, se più altre linee ACB , ADB convengono ne' due termini A , B , esse sono maggiori della retta AB ; ed essendo amendue concave verso la medesima parte, bisogna che l'esteriore ACB sia maggiore dell'interiore ADB , accostandosi più questa, che quella alla minima retta linea AB .

FIG. 13. VI. Onde ancora è chiaro, che se da' termini A , B

A, B della base AB d' un triangolo ACB, siano tirate dentro due linee AD, BD, convenienti in D, saranno le due interne AD, BD minori delle due esteriori AC, BC, paragonando la somma di quelle alla somma di queste, come si è detto delle curve antecedenti ADB, ACB.

DEFINIZIONI.

IX. Concorrendo due linee AB, CB nel punto B, non da parti direttamente opposte, che farebbero così una sola retta linea, ma in modo tale, che resti una inclinata all' altra, si diranno fare un *Angolo* nel punto del loro concorso, il quale stimerassi maggiore, o minore, secondo la maggiore, o minore apertura di dette linee, senza riguardo alla lunghezza di esse. FIG. 14.

X. Quando una linea DB concorra con la retta AC nel punto B, in modo tale, che non penda più da una banda, che dall' altra, ma sia ugualmente inclinata ad amendue le parti BC, BA, sicchè gli angoli ABD, CBD siano uguali, allora detta linea BD si dirà *Perpendicolare* all' altra AC. FIG. 15.

XI. E ciascuno di detti angoli ABD, CBD si dirà *Angolo retto*.

XII. Ma facendo la linea DB sopra la AC angoli disuguali, da una parte l'angolo ABD maggiore, dall' altra CBD minore, si dirà essa linea DB *Obliqua* sopra l' altra AC. FIG. 16.

XIII. E l'angolo maggiore si dirà *Ottuso*, l'angolo minore *Acuto*.

S C O L I O I I I .

I. **D**icefi uno degli angoli ABD conseguente all'altro CBD, essendo fatti ambidue dalla medesima linea DB sopra la stessa AC; e dicendosi Retti tali angoli, quando sono tra di loro uguali, bisogna che riuscendo disuguali, il maggiore del retto sia l'ottuso, ed il minore del retto sia l'acuto, e tutti e' due presi insieme sono uguali alla somma di due retti.

II. Non solamente sono uguali tra loro li due conseguenti angoli retti, fatti da una perpendicolare sopra una linea retta, ma ancora qualunque angolo retto è uguale ad un altro fatto sopra un
 FIG. 17. altra linea; imperocchè, se alla retta AC, cui è perpendicolare DB, si soprapponga la EH, cui è perpendicolare la LF, facendo concorrere il punto F col punto B, si adatterà essa retta ABC con EFH, e la perpendicolare BD con l'altra FL; perchè altrimenti, se la FL cadesse di quà dalla BD, l'angolo EFL sarebbe minore di ABD, ed LFH maggiore di DBC; onde essendo uguali ABD, e DBC, non sarebbero uguali EFL, LFH, per essere quello minore del primo, e questo maggiore del secondo, che era uguale al primo. Bisogna dunque, che le perpendicolari FL, BD convengano, e però l'angolo retto ABD sia uguale all'altro EFL, e l'angolo retto DBC sia uguale ad LFH, e così a ciascun retto.

III. E' poi chiaro, che li due angoli ancora di-
 TAV. II. fuguali fatti da una retta DB sopra alla retta AC,
 FIG. 18. cioè l'angolo ABD ottuso, e DBC acuto, presi insieme sono uguali a due retti, perchè se dal me-
 de-

desimo punto B sarà tirata sopra la medesima retta AC la perpendicolare BE, le due aperture degli angoli ABD, e DBC si adatteranno alli due retti ABE, EBC, e però gli saranno uguali, combaciandosi con essi (per l'assioma quinto)

IV. Segandosi due linee rette nel punto B, gli angoli alla cima opposti ABF, CBD saranno uguali, perchè aggiunto all' uno, e all' altro l' intermedio ABD, è chiaro, che li due ABF, ed ABD sono uguali a due retti, come ancora li due CBD, ABD (per quello si è detto al numero 3. precedente); dunque essendo ABF con ABD uguali a CBD con ABD, tolto di comune ABD, deve essere ABF uguale a CBD (per l'assioma 3.)

FIG. 19.

V. Se più linee AC, DF, HI s' intersecano nel medesimo punto B, tutti gli angoli, che ne risultano, saranno uguali a quattro retti; ed ancora se non fossero per diritto esse linee l' una con l' altra, ma convenissero in esso punto B a fare tutti gli angoli, che riempissero quello spazio, la somma di detti angoli sarebbe uguale a quattro retti; perchè tirata qualunque retta linea HI per lo punto B, gli angoli, che rimarrebbero da una parte di essa, sarebbero uguali a due retti, e quelli dell' altra parte ad altri due retti, e però tutti a quattro retti debbono essere uguali.

FIG. 20.

VI. Quindi solamente quelle figure, di cui tutti gli angoli posti insieme uguagliano quattro retti, possono riempire lo spazio, congiungendosi in un punto, senza lasciarvi interstizj voti.

VII. Se due linee rette AB, CB congiungendosi dall' una, e dall' altra parte colla retta DB nello stesso punto B, faranno con essa li due angoli

FIG. 21.

goli ABD , CBD uguali a due retti, saranno esse linee per diritto fra loro; altrimenti prolungata la retta CB , se non convenisse colla BA , ma cadesse nel sito BE , sarebbero gli angoli EBD , e CBD uguali a due retti, cioè agli stessi due ABD , e CBD ; dunque sarebbe ABD uguale ad EBD , cioè la parte al tutto; il che è impossibile (per l'Assioma 6.)

D E F I N I Z I O N I.

XIV. Intendendo muoversi la retta CA in una
 FIG. 22. superficie piana attorno all' estremo suo punto C , che ivi mantengasi fisso, e raggiarsi essa linea fino a che ritorni al primiero suo sito, la superficie $ADBE$, che quindi viene generata, si chiama *Cerchio*, ovvero *Circolo*.

XV. Ed esso punto fisso C dicesi *Centro* di esso *Cerchio*.

XVI. E la curva descritta dall' estremo A nel suo giro, si dice *Periferia*, o *Circonferenza*.

XVII. Qualunque retta AB , ovvero DE stesa pel centro C , e terminata di quà, e di là alla circonferenza si chiama *Diametro* del *Cerchio*.

XVIII. E qualsivoglia retta tirata dal centro alla circonferenza CA , CD , CB , CE , dicesi *Raggio*, ovvero *Semidiametro* di quel circolo.

S C O L I O IV.

I. **E** Manifesto per le cose dette di sopra, che siccome il *Triangolo* è la prima, e più semplice figura rettilinea tra le piane figure, così il *Circolo* è la prima, e più semplice *Figura curvilinea*.

II. Si

II. Si offervi ancora, che nel Cerchio tutti i raggi, cioè tutte le linee condotte dal centro alla circonferenza sono uguali, imperocchè la retta CA generatrice del Cerchio, nel girare intorno si combacerebbe esattamente con qualunque altra linea CD, CB, CE, e però tutte sono uguali (per l' *affioma* 5.)

III. Quindi è chiaro, che se due Cerchj DF, AE si tocchino, o si seghino in F, non potranno avere un centro comune ad ambidue; imperocchè FIG. 13. chi supponesse fosse C quel centro comune, congiunta al concorso F d' ambi i Cerchj la retta CF, e dove le periferie vanno distinte, tirata la CE, segante l' altro Cerchio in D, esser dovrebbe il raggio CF tanto uguale a CE, che a CD, onde (per l' *affioma* 1.) sarebbe CE uguale a CD, il tutto alla parte; il che è impossibile (per l' *affioma* 6.)

IV. Serve poi la circonferenza di qualunque Cerchio a misurare la quantità degli angoli rettilinei, la quale non dipende dalla lunghezza maggiore, o minore delle rette linee, che comprendono detto angolo, ma dalla varia loro inclinazione, FIG. 14. che rende essi angoli, o retti, o maggiori, o minori del retto; pertanto descritto col centro C qualunque circolo AGBF, ovvero HMIN, e condotto il diametro AB nel primo, o il diametro HI nel secondo, ed eretta per lo centro perpendicolare ad AB l' altra retta GF, che sega il minor cerchio in NM, tanto saranno angoli retti ACG, BCG, che gli altri due HCN, ICN, ed ancora gli opposti ACF, BCF, ed HCM, ICM, tutti tra di loro uguali (*Sco-lio* 3. num. 2.) e però da que' due diametri es-

sendo divisa in 4. parti l'una, e l'altra circonferenza (come nel seguente numero dimostrerassi) tra di loro uguali, esse misurano li detti angoli retti: cioè divisa qualunque di dette circonferenze in 360 parti uguali (che si chiamano gradi circolari) la quarta parte di essi, che saranno gradi 90., è la misura dell'angolo retto; e se tirasi per lo centro qualunque altra linea DE inclinata ad AB, che farà l'angolo ottuso ACE, e l'acuto ECB, se nell'arco AGE vi sono 120. gradi, e nell'arco EB 60, quello sarà la misura dell'angolo ACE, questo dell'angolo ECB, e l'angolo di mezzo ECG sarà di gradi 30., essendo tale l'arco GE. E così ancora nel Cerchio più piccolo sarà HN di 90. gradi, misura dell'angolo retto HCN, ed HNL di gradi 120., misura dell'angolo ottuso HCL, ed LI di gradi 60., ed NL di 30, che misurano gli acuti ICL, LCN; e così qualunque altro angolo fatto al centro si misura co' gradi dell'arco sottoposto di un Cerchio descritto con qualunque raggio.

FIG. 25.

V. Che la circonferenza dividasi in parti uguali da qualunque angolo uguale fatto al centro, e però sia l'arco intercetto da i lati dell'angolo, la precisa misura di esso, si dimostra così. Tirato nel Cerchio il diametro ACB, s'intenda muoversi la porzione AEB, rivoltandosi sopra l'altra ADB; è manifesto, che soprapposta quella sopra di questa, necessariamente si combaceranno da per tutto; altrimenti, se riuscisse disposta in un sito AFB, rimanendo in qualche parte l'arco di essa d'sposto dentro, o fuori dell'arco dell'altra ADB, tirato dal punto D al centro C il raggio DC, seghe-

rebbe

rebbe l'altra porzione in F , e sarebbe il raggio FC disuguale al raggio DC ; il che è assurdo, essendo tutte le rette condotte dal centro alla circonferenza tra di loro uguali, come sopra si è detto al num. 2. Pertanto conviene, che tutti i punti della porzione AEB , rivoltata sopra l'altra ADB , convengano co' punti di questa, e non si allontanino, o si avvicinino al centro più di essi. Dunque si adatta l'arco AEB all'arco ADB . E così ancora tirato qualunque altro diametro DH , se intorno ad esso si rivoltasse la parte DAH , sopra la parte DBH , queste pure si combacerebbero insieme; onde tutte le porzioni della circonferenza, segate dal diametro, sono tra loro uguali, e sono la metà dell'intera circonferenza; ed essendo l'angolo ACE fatto al centro uguale all'angolo ECH , ovvero ACD , sovrapposti l'uno all'altro, essi angoli si combaceranno, e però gli archi loro, adattandosi pure l'uno sopra l'altro, sono uguali. Dunque la circonferenza circolare deve essere veramente la misura degli angoli, corrispondendo gli archi uguali agli angoli uguali, e li maggiori a' maggiori, ed i minori a' minori.

VI. Quindi è, che divisa la circonferenza in 360. gradi uguali, la misura dell'angolo retto è 90. gradi, che sono la quarta parte di essa, e la metà di esso angolo retto, che è un acuto semiretto, ha per misura 45. gradi, ed il suo conseguente ottuso è di gradi 135. e così misuranfi ancora li maggiori, ed i minori; anzi qualunque grado si divide in 60. minuti primi, e qualunque primo minuto in 60. minuti secondi, e qualsivoglia secon-

do in 60 minuti terzi; e così proseguendo in infinito, perchè a qualche angolo acuto, ovvero ottuso può corrispondere un arco circolare, non composto di precisi gradi interi, ma di alcuni soli, e di qualche parte di un altro, la qual parte dovrà importare alcuni minuti primi, ed altri secondi, o terzi, o quarti &c. e tale sarà la misura di esso angolo, e quelli angoli saranno uguali, che averanno sotto di se gli archi della stessa misura di gradi, o minuti; ed uno sarà maggiore dell' altro, secondochè corrisponderà ad un arco di più gradi, o minuti.

A V V E R T I M E N T O.

LE seguenti Proposizioni si chiamano, o Problemi, ne' quali si cerca il modo di fare qualche figura, qualche angolo, o tirarvi qualche linea; o si dicono Teoremi, in cui si dimostra qualche proprietà delle figure, e degli angoli, o delle linee, di cui si parla; onde alla prima Proposizione si aggiungerà, essere Problema, ed alla seconda, che sia Teorema, non aggiungendo però tali titoli alle altre Proposizioni; perchè facilmente si riconosceranno nel loro titolo, se siano Problematiche, o Teorematiche; e da esse ancora si daranno altre definizioni; non ancora quì sopra proposte.

Non aggiungo ne meno quì i Postulati proposti da Euclide; bastando che da qualunque Scrittore si possa da un punto all' altro tirarvi una linea retta: ed ancora qualunque linea prolungarla direttamente quanto sarà di bisogno; e da qualsivoglia punto preso per centro, con qualunque intervallo dato, come raggio, o semidiametro, descriverci un Circolo.

PRO-

PROPOSIZIONE I. PROBLEMA.

Date tre linee rette FA, AB, BE, delle quali due qualunque prese insieme siano maggiori della terza, formarne il triangolo ACB.

D Al termine *A* della retta *AB* preso come centro, e con l'intervallo dell'altra retta *AF*, descrivasi il circolo *FCG*; e preso pure l'altro termine *B* per centro, con l'intervallo della *BE*, descrivasi un altro circolo *ECD*: e dove questi Cerchj con le loro circonferenze si segnano in *C* (essendo li due raggi di essi maggiori di *AB*, e la stessa *AB* con *BE*, maggiore di *AF*, cioè di *AG* uguale ad *AF*, siccome ancora *AB* con *AF* è maggiore di *BD* uguale a *BE*) si congiungano a' termini dell'altra retta *AB* le rette *CA*, *CB*; farà fatto *ACB* il triangolo ricercato, essendo il lato *AC* uguale ad *AF* ed il lato *BC* uguale a *BE* (*a*), e l'altro lato *AB* il medesimo proposto. Dunque è fatto il triangolo compreso dalle tre date linee, come far si dovea.

FIG. 16.

(a) Scol. 4.
num. 2.

COROLLARI.

I. Se le tre linee proposte fossero tra loro uguali, qualunque circolo passerebbe pel centro dell'altro, essendo tanto *AF* uguale ad *AB*, quanto *BE* uguale alla stessa; onde un tale triangolo *ABC*, composto di tre lati uguali, dirassi *Triangolo Equilatero*.

FIG. 17.

II. E se fossero due sole linee *AF*, *BE* tra di loro uguali, risultandone il triangolo *ACB*,
co'

FIG. 18.

co' due lati uguali AC, BC , dirassi *Triangolo Isoscele*, ovvero *Equicrure*.

III. Ma se tutte le linee date sono disuguali, come nella figura 26., esso triangolo ACB , in cui AC è maggiore di CB , e questa pure maggiore di AB , si dice *Triangolo Scaleno*.

PROPOSIZIONE II. TEOREMA.

Ne' triangoli BAC, EDF , se intorno agli angoli uguali $A, e D$ saranno i lati dell' uno uguali a quelli dell' altro, cioè AB uguale a DE , ed AC uguale a DF ; saranno ancora uguali le loro basi BC , ed EF ; e gli angoli interni, opposti a' lati uguali, saranno pure tra di loro uguali; e prolungati i lati sotto alle basi, ne riusciranno pure gli angoli esterni uguali CBG ad FEI , e BCH ad EFK ; E tutto un triangolo sarà uguale all' altro.

FIG. 29. **I**ntendasi sovrapposto un triangolo all' altro: si adatterà l'angolo BAC all'angolo uguale EDF , ed i lati uguali converranno insieme, AB con DE , ed AC con DF ; dunque ancora la base BC sarà congruente alla base EF ; onde queste pure saranno uguali, adattandosi l'una sopra all'altra ^(a); ed ancora gli angoli interni, e gli esterni converranno tra loro, e tutto il primo triangolo sarà adattato, e congruente al secondo; però saranno uguali tutti gli angoli corrispondenti, e tutti e' due i triangoli ABC, DEF si mostreranno uguali. Il che dovea dimostrarsi.

(a) Scol. 2.
num. 1.

C O R O L L A R J.

FIG. 30. I. Essendovi una linea retta AC , divisa pel mezzo

mezzo in B , dal qual punto sia la perpendicolare BE , di sopra, o di sotto ad essa retta AC , farà qualsivoglia punto E , ovvero D in essa perpendicolare ugualmente distante da' termini A , e C ; imperocchè, congiante le rette AE , CE , ovvero le altre AD , CD , essendo nel triangolo ABE , e nell'altro CBE gli angoli di quà, e di là dal punto B uguali, perchè retti ^(*), ed il lato BA uguale al lato BC , ed il lato BE comune ad essi, dovrà essere la base AE uguale alla base CE ; e similmente ne' triangoli ABD , CBD essendo i lati AB , BC uguali, ed il lato BD comune, intorno agli stessi uguali angoli retti ABD , CBD , faranno pure le basi AD , CD uguali; dunque qualsivoglia punto E , ovvero D , preso nella stessa perpendicolare EB , è distante ugualmente da' termini A , C della retta AC , divisa in mezzo da quella perpendicolare.

(*) *Defin.*
10.

II. Similmente sono tra loro uguali gli angoli fatti da esse rette EA , EC sopra la base AC ; o ancora con essa perpendicolare EB ; cioè EAB è uguale ad ECB , e l'altro AEB è uguale a CEB : e così ancora sono uguali gli angoli DAB , DCB , e gli altri ADB , CDB , tra loro.

III. Può ancora dimostrarsi, che ciascun punto ugualmente distante da essi termini A , C , deve essere necessariamente situato nella perpendicolare BE , che sega in mezzo essa retta AC , nè può essere fuori di essa; perchè se si supponesse, che il punto F fuori di tale perpendicolo fosse ugualmente distante da A , e da C , congiunte le rette AF , CF , farà da alcuna di queste segata la perpendicolare in D , e congiunta dall' altro

FIG. 31.

B

ter-

termine la AD farà uguale a CD ; dunque le due
 (a) Affio- FD , AD , faranno uguali ad FC (a); ma quel-
 1778 3.
 (b) Sol. 2. le due FD , AD , sono maggiori di AF (b), dun-
 num. 5. e 6. que ancora FC è maggiore di AF , onde non è
 il punto F in distanza uguale da A , e C .

IV. Dunque ciascun triangolo equicrure AEC ,
 ovvero ADC , averà sempre il vertice E , o pu-
 re D nella stessa perpendicolare BE , condotta
 dal punto di mezzo della base, e non mai ave-
 rà il vertice fuori di essa; onde essendo sempre
 uguali gli angoli EAB , ECB , ovvero gli altri
 due DAB , DCB , sempre dunque il triangolo equi-
 crure ha gli angoli uguali sopra alla base.

V. Anzi essendo in un triangolo due angoli
 uguali, bisogna che ancora i suoi lati opposti
 sianò uguali, e se un angolo è maggiore dell'
 altro, il lato opposto al primo farà maggiore,
 che l'opposto al secondo; siccome essendosi mo-
 strata CF maggiore di AF , l'angolo pure CAF
 è maggiore di BAD , e però maggiore di ACF
 uguale a questo; e comunque sia tirata la AF ,
 che faccia l'angolo FAC maggiore di ACF , la
 retta CF deve passare oltre la perpendicolare
 BE , e però diventare maggiore CF della AF ,
 come si è dimostrato nel Corollario 3.

VI. La minima delle rette, condotte dal pun-
 FIG. 32. to A sopra alla retta BE , farà la perpendicolare
 AB , e dell'altre oblique AD , AE , la più vici-
 na alla perpendicolare è minore della più lon-
 tana; perchè prolungata AB in BC uguale ad
 essa, e congiunte le CD , CE ; essendo la somma
 delle esteriori AE , EC maggiore della somma
 delle interne AD , DC , e queste pure maggiori
 di

di AC ^(a), ancora la metà di esse (essendo AE ^{(a) Scol. 2. nu. 5. e 6.} uguale ad EC , e AD uguale a DC per il Coroll. 1.) cioè AE , farà maggiore di AD , e questa pure maggiore di AB ^(b), onde questa è la ^{(b) Affo. 7.} minima di tutte le altre.

PROPOSIZIONE III.

Vicendevolmente, se ciascun lato d'un triangolo TAV. III.
FIG. 3j.
 ABC è uguale al corrispondente lato dell' altro DEF , cioè BC , ad EF , BA ad ED , ed AC a DF , ancora gli angoli opposti a' lati uguali saranno uguali.

SI soprapponga il lato BC del primo al lato FIG. 34.
uguale EF del secondo, e verso la medesima parte sovrapposti essi triangoli, si adatteranno totalmente, ciaschedun lato soprapponendosi all' FIG. 35.
altro uguale, onde tutti gli angoli si combagieranno, e faranno però uguali ancora essi ^(c); altrimenti, se i lati AB , AC non si adattassero alli uguali ^{(c) Aff. 5.}
 DE , DF , ma gli si ritirassero sopra, o sotto, come nella seconda figura, farebbero li due lati di sopra BA , CA maggiori de' due lati di sotto ED , FD ^(d), contro il supposto; e se i lati s' interfecassero AB , FD in G , come nella figura terza, essendo BG con GD maggiore di BD , ed ancora CG con GA maggiore di CA , farebbe pure AB con DF maggiore di ED con CA ; il che è contro l'ipotesi; essendo la somma delle due prime uguale alla somma delle seconde ^(d). Dunque veramente si adattano ^{(d) Aff. 3.}
essi lati uguali, onde ancora gli angoli corrispondenti sono uguali. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Si raccoglie da quest' ultimo caso, che se due rette linee BA , FD si segano in G , sono esse maggiori delle rette DB , AF sottotese agli angoli opposti BGD , AGF ; ed ancora può dedursi, che dagli stessi termini della base BC non possono condursi le rette uguali a' lati BA , CA verso la medesima parte, che insieme convengano in un altro punto D , e non nel medesimo punto A .

FIG. 36.

II. Quindi ancora può dedursi il modo di segare in due angoli uguali un angolo dato AEF ; perchè tagliata dalla EF la parte EC uguale all' altra EA , e congiunta la AC , facendosi sopra di essa dalla parte opposta al dato angolo il triangolo equilatero, o equicrure ADC , congiunta la retta ED segnerà per mezzo esso angolo AEF , perchè tutti i lati del triangolo EAD uguagliano quelli dell' altro ECD , cioè EA uguale ad EC , ed ED lato comune ad ambidue i triangoli, e la base AD uguale alla base CD ; dunque è diviso l' angolo AEF negli angoli AED , CED tra loro uguali.

III. Ancora volendo segare pel mezzo una linea AC , fatto sopra alla medesima un triangolo equilatero, o equicrure AEC , e diviso pel mezzo l' angolo AEC colla retta EB , segneràssi pel mezzo in B la base AC , avendo li triangoli AEB , CEB intorno l' angolo uguale in ambidue verso E , il lato AE uguale al lato EC , ed il lato EB comune, bisogna che ancora le basi AB , e BC sia-

(a) Prop. 2. no uguali (a).

IV.

IV. Circa il tirare una linea EB perpendicolare ad un'altra AC , o nel punto B assegnato in essa, o dal punto E superiore alla medesima: nel primo caso, prese di quà, e di là dal punto B due linee uguali BA , BC , e sopra alla retta AC fatto un triangolo equilatero, o equicrurare AEC , congiunta la EB sarà perpendicolare alla base, essendo gli angoli ABE , CBE uguali per essere ancora uguali i lati opposti AE , EC ne' triangoli AEB , CEB , con i lati uguali AB , CB , e l'altro EB comune ad ambidue. Ma nel secondo caso, inclinata qualunque linea EC dal dato punto E sopra la retta AC , e col centro E , intervallo EC descritto il cerchio CGA , la circonferenza del quale segnerà la retta AC in un altro punto A , e divisa questa AC pel mezzo in B , congiunta EB sarà la perpendicolare, perchè tirate le rette EA , EC , li triangoli EBA , EBC avendo tutti i lati corrispondenti uguali, devono ancora gli angoli EBA , EBC essere uguali, e però retti.

FIG. 37.

FIG. 38.

V. Volendo dati due punti A , C ritrovare un punto E , da essi ugualmente distante in una data linea retta, o curva GF , congiunta la retta AC , e divisa pel mezzo in B , gli si alzi la perpendicolare BE , che concorra con la linea GF nel punto E , è manifesto, che congiunte le rette AE , CE saranno uguali (a), e però li dati punti A , C saranno dal punto E della proposta linea GF ugualmente distanti; e se la detta perpendicolare non convenisse con GF , non vi sarebbe in essa verun punto ugualmente da essi termini A , C distante (b).

(a) Prop. 2.
Coroll. 1.(b) Prop. 2.
Coroll. 3.

B 2

VI.

- FIG. 39. VI. Tirata nel cerchio qualunque corda AB , e dal suo punto di mezzo F condotta la perpendicolare FM , in essa dovrà essere il centro del cerchio, che da' termini A, B deve essere ugualmente lontano, essendo uguali tutti i raggi del cerchio (*a*), non potendo però esso centro essere fuori di tale perpendicolare (*b*); e tirata qualunque altra corda DE , e dal suo punto di mezzo G erettavi la perpendicolare GL , concorrente con la FM in C , dovrà questo punto essere il centro del cerchio, dovendo essere tanto in quella, che in questa perpendicolare: però in questa maniera si trova il centro del cerchio, o di qualunque arco dato.
- (*a*) Scol. 4.
num. 2.
- (*b*) Prop. 2.
Coroll. 3

PROPOSIZIONE IV.

- FIG. 40. Ne' triangoli BAC, EDF essendo uguale il lato AB al lato DE , ed il lato AC al lato DF , se l'angolo A è minore dell'angolo D , sarà la base BC parimente minore della EF .

- I**Mperocchè sopraposto quel triangolo a questo, ed adattatosi il lato AB al suo uguale DE , l'altro lato AC caderà al di dentro, di quà dal suo uguale lato DF , essendo l'angolo BAC minore di EDF ; onde il termine C , o caderà nella base EF , o sopra, o sotto di esso, secondo che l'angolo ABC fosse uguale, o minore, o maggiore dell'angolo DEF ; però sarà sempre BC minore di EF , adattandosi nel primo caso quella ad una parte di questa; e nel secondo caso le due AC, BC essendo minori delle altre due DF, EF (*c*), siccome AC è uguale a DF , l'altra BC deve
- (*c*) Scol. 2.
num. 6.
- ve

ve essere minore della EF ; e nel caso terzo, essendo le due AC, EF maggiori delle due BC, DF ^{(a) Prop. 3.}, ma la DF uguale ad AC , bisogna che sia EF maggiore della BC . Il che doveasi dimostrare. ^{Coroll. 1.}

COROLLARI.

I. Ancora viceversa, se si sapesse, che in due triangoli fossero due lati del primo uguali a quelli del secondo, ma la base di quello minore della base di questo, farà pure l'angolo verticale del primo minore di quello del secondo: perchè se tali angoli fossero uguali, ancora le basi loro sarebbero uguali ^(b), e se l'angolo del primo fosse maggiore di quello del secondo, ancora la base di quello sarebbe maggiore della base di questo, contro l'ipotesi. ^{(b) Prop. 2.}

II. Se in qualunque triangolo EFD fosse un angolo EDF maggiore di un altro DEF , il lato EF , opposto all'angolo maggiore, deve pure essere maggiore del lato DF opposto all'angolo minore; imperocchè supposto dentro l'angolo maggiore EDF , l'angolo EDH uguale al minore DEF , farà la retta DH uguale ad EH ^{(c) Prop. 2.}, e però le due $DH, ed HF$ sono uguali alla EF ; ma quelle due sono maggiori della DF , dunque ancora la EF è maggiore di essa DF . ^{Coroll. 5.}

PROPOSIZIONE V.

Delle rette condotte alla circonferenza di un cerchio da un punto D , distante dal centro C , la DB , che passa pel centro, è la massima di tutte, la DA , per cui non passa il centro, ma è in diretto alla DB , sarà la minima, e dell'altre DE, DF, DI , FIG. 42.

B 4

DI,

DI, DH, la più vicina alla massima è maggiore della più lontana, e la più vicina alla minima è minore della più rimota da essa.

Imperochè congiunti i raggi, essendo CB uguale a CE , aggiuntavi la CD , faranno le due CE, CD uguali alla intera DB ; ma quelle due sono maggiori della terza DE , dunque DB è maggiore della DE . Poſcia eſſendo l'angolo ECD maggiore dell'angolo FCD , ne' triangoli DCE, DCF , che hanno il lato CE uguale al raggio CF , ed il lato CD comune, e però uguale in ambi-
 due i triangoli, la baſe DE farà maggiore della DF ^(*), dunque la più proſſima DE alla maxima DB e maggiore della DF più lontana dalla ſteſſa. Similmente ne' triangoli CID, CHD , che hanno i lati uguali CI , e CH , ed il comune CD , e l'angolo DCI è minore dell'angolo HCD ; la baſe DI è minore della DH , ed ancora la DA è minore della ſteſſa DI , perchè CD con DI è maggiore di CI , e però è maggiore della CA uguale a CI ; dunque tolto di comune CD , ancora la DI farà maggiore della DA , la quale però è la minima di tutte, e le più proſſime ad eſſa rieſcono minori delle più lontane. Il che dovea dimoſtrarſi.

C O R O L L A R J .

I. Due linee però ſolamente poſſono eſſere uguali, una condotta da una parte, e l'altra dall'altra parte del diametro, come farà DF uguale a DG , e DH uguale a DK , quando ſeghino di quà, e di là dal diametro due archi uguali, come

me AF è uguale ad AG , ed AH uguale ad AK , onde l'angolo DCF uguaglia l'angolo DCG , e l'angolo DCH è uguale all'altro DCK , onde avendo per lati uguali i raggi, ed il lato DC comune, le loro basi riescono uguali.

II. Onde, se da un punto si trovassero condotte alla circonferenza più di due linee uguali. esso punto farebbe il centro di esso cerchio, mentre dal punto, che non è centro, non se gli possono condurre più di due linee uguali.

III. Quindi due cerchj AFE , DBE non posso- FIG. 43.
no segarli, se non in due punti, come A , e B ; che se convenissero ancora in altri punti, per esempio in E , dal centro C di uno di essi condotte le rette CA , CB , CE , tra di loro uguali, dovrebbe lo stesso punto C essere centro ancora dell'altro cerchio; il che è impossibile (a); dunque &c.

(a) Scol. 4.
num. 3.

PROPOSIZIONE VI.

Se dal termine B del raggio CB gli si tira sopra la perpendicolare ABE , non potrà concorrere con altro punto del cerchio; onde questa si chiamerà la sua Tangente.

FIG. 44.

Imperochè tirata dal centro C a qualunque altro punto E di essa perpendicolare la retta CE , farà questa maggiore della CB (b); dunque è maggiore del raggio CH ; e però qualsivoglia altro punto della retta ABE essendo dal centro più lontano di qualunque raggio, non concorre essa linea con la circonferenza, se non nell'unico punto B , ove la tocca; e però questa linea perpendicolare al raggio nel termine di esso, dicesi tangente del circolo. Il che &c.

(b) Prop. 2.
Coroll. 6.

C O R O L L A R J.

I. Vicendevolmente se una retta AB tocca il cerchio, congiunta la retta CB dal centro al contatto, gli farà perpendicolare; altrimenti supponendo, che la sua perpendicolare condotta dal centro C , fosse un'altra CE , farebbe essa minore di CB , cioè del raggio CH , e riuscirebbe il tutto minore della parte; il che è impossibile.

FIG. 45. II. Qualunque altra retta linea BF condotta dallo stesso punto B segherà il cerchio, perchè dal centro tiratavi la perpendicolare CG , essendo questa minore del raggio CB , è pure minore del raggio CI ; dunque si distende BF sotto l'arco circolare BIN , e però sega il cerchio.

III. Dunque l'angolo ABI , che dicesi *Mistilineo*, contenuto dalla retta BA , e dalla curva BI , è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo ABF ; e l'angolo pure Mistilineo DBI , contenuto dal diametro DB , e dalla circonferenza $BIND$, è maggiore di qualunque angolo acuto DBF , perchè facendo la BF con la tangente qualunque minimo angolo acuto, e col diametro qualsivoglia angolo acuto molto grande, cade dentro il cerchio, onde l'angolo mistilineo ABI è sempre minore di qualunque acuto ABF ; e l'angolo DBI è sempre maggiore dell'altro acuto DBF .

IV. Quindi se la retta BD girasse intorno al punto B , passerebbe da un estremo all'altro, senza passare pel mezzo; cioè farà col diametro un angolo acuto, che sempre diventerà maggiore, secondo che più si allontana da esso, continuando

do il suo giro; e sempre tale angolo acuto farà minore del mistilineo CBI ; poi arrivando essa linea mossa sopra la tangente BA , farà col diametro l'angolo CBA retto maggiore di esso CBI , nè mai in sito veruno gli averà fatto un angolo uguale.

V. Se al cerchio faranno condotte due tan- FIG. 46.
genti BA , HA , concorrenti insieme in A ; o se dal detto punto A siano tirate esse tangenti AB , AH , faranno tra di loro uguali; perchè condotti dal centro C i raggi CB , CH a' punti del contatto, faranno angoli retti; e congiunta la BH , essendo il triangolo BCH equicrura, gli angoli CBH , CHB , faranno uguali ^{(a) Prop. 2.}; cavati dunque ^{Coroll. 4.} questi dagli uguali angoli retti CBA , CHA , li rimanenti ABH , AHB faranno pure uguali ^{(b) Aff. 3.}; dunque le rette AH , AB tangenti sono pure uguali tra loro ^{(c) Prop. 2.} ^{Coroll. 5.}

VI. Congiunta poi al centro C dal concorso delle tangenti A la retta CA ; dividerà pel mezzo gli angoli BCH , e BAH , e farà perpendicolare alla corda BH , facendovi gli angoli retti in D , ove pure farà essa BH divisa pel mezzo; imperocchè li triangoli ABC , AHC avendo i lati corrispondenti l'uno all'altro uguali, devono ancora gli angoli loro opposti essere uguali, cioè BCA , ed HCA ; e CAH con CAB ^{(d) Prop. 3.}. Onde ancora ne' triangoli BCD , HCD essendo il lato BC uguale a CH , e la CD lato comune, intorno gli angoli uguali BCD , HCD , la base BD sarà uguale alla base DH , ed ancora gli angoli corrispondenti uguali; cioè CDB uguale a CDH , e però ambidue retti ^{(e) Prop. 2.}.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 47. *Se due cerchj GFE, BFD si toccano in F al di dentro, o al di fuori, la retta, che congiunge il centro C del primo col centro A del secondo, passerà per il loro contatto F.*

Altrimanti, supponendo, che il centro *A* del cerchio *BFD* non fosse nella retta *CF*, che connette il centro *C* dell'altro cerchio *GFE*, col comune loro contatto *F*, ma che fosse nel punto *a* fuori di essa *CF*, onde la retta *Ca*, congiungente i centri, segasse il cerchio maggiore in *E*, ed il minore in *D*, ne seguirebbe, che essendo nel cerchio *GEF* dal punto *a* tirata pel centro *C* la *aC*, farebbe la rimanente *aE* la minima^(a), è però minore della *aF*; ma supponendosi *a* il centro del cerchio *BFD*, farà pure *aD* uguale ad *aF*; dunque *aE* farebbe minore della *aD*, il tutto della parte; il che è impossibile; dunque esso centro del cerchio *BFD* non è fuori della *CF* in *a*, ma nel punto *A*, dentro la stessa retta; però la linea, che connette i centri de' cerchi, che si toccano, passa per il loro contatto. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. E' chiaro, che ancora i cerchj si toccano in un solo punto; altrimenti, condotte dal centro *A* del cerchio *BFD* più linee a' punti, con cui si connetteresse il contatto con l'altro cerchio *GFE*, farebbero tali linee tutte uguali ad *AF*, la quale è la minima, tirata da *F* alla circonferenza

renza GFE (^a), onde non può averne altre uguali, tirate dal medesimo punto sopra a quell' arco. (^a) Prop. 5.

II. Ne segue ancora da ciò, che due cerchj, i di cui centri sono C , ed A , descritti per un punto F della stessa linea CA , ivi si toccheranno; perchè essendo AF la minima, condotta da A al cerchio del centro C , essa è minore di AE , dunque ancora il raggio AD è minore della retta AE , e però le circonferenze di tali cerchj non sono insieme congiunte, se non nel punto F , per cui passano i raggi CF , ed AF descrivendo i cerchj FEG , FDB , che in esso F conseguentemente si toccano.

FIG. 48.

PROPOSIZIONE VIII.

Se le due rette BE , CF sopra l' altra retta BC hanno due angoli interiori ABC , ed ACB uguali a due retti, esse linee prolungate verso qualunque parte, non potranno convenire insieme, e però si diranno Parallele. TAV. IV. FIG. 49.

SE potessero convenire, si congiungano in A , e prolungata la AC in CD uguale alla BA , si congiunga BD , farà il triangolo BCD uguale all' altro BCA , perchè essendo gli due angoli ABC , e BCA uguali a due retti, ed ancora a due retti essendo uguali DCB , e BCA , dunque l' angolo ABC è uguale a DCB , ed il lato AB uguale a CD , ed il lato BC comune, dunque ancora la base AC farà uguale a BD ; sicchè BD , e BA essendo uguali ad AC , e CD , cioè alla retta AD , farebbero due lati del triangolo ABD uguali alla base; il che è impossibile; dunque non

non può essere, che le linee rette BE, CF , avendo gli angoli, fatti sopra alla retta BC , uguali a due retti, convengano insieme in A ; ma non convenendo da veruna parte insieme (perchè ancora dalla banda opposta farebbero con la BC gli angoli uguali a due retti) si diranno linee *Parallele*. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Dunque in ogni triangolo i due angoli interni verso qualunque suo lato, sono minori di due retti; onde prolungando qualsivoglia lato BC in L , l'angolo esterno ACL farà maggiore di qualunque delli due interni opposti ABC , o BAC , perchè ciascheduno di questi con l'altro ACB è minore di due retti, ma il detto esterno ACL , col medesimo ACB , uguaglia i due retti.

FIG. 50. II. Se in due rette linee AB, GE , segate dalla retta FC riusciranno uguali gli alterni ACD, CDE , o pure l'esterno FCB , con l'interno opposto CDE faranno esse linee AB, GE parallele; perchè siccome l'angolo BCD con l'altro ACD , ed ancora con l'esterno conseguente FCB , forma due angoli uguali a due retti così essendo CDE uguale all'alterno ACD , ed all'esterno FCB , faranno li due angoli interni BCD, CDE uguali a due retti, e però le linee AB, GE non possono insieme convenire, onde sono parallele.

III. Viceversa, se le linee AB, GE si suppongono parallele, qualunque retta FCD , che le segghi, farà gli angoli alterni uguali, e l'esteriore uguale all'interno opposto, e gli due interni BCD, EDC

EDC uguali a due retti, perchè se ivi, o dall'altra parte li conseguenti fossero minori di due retti, prolungate esse linee converrebbero insieme, facendo un triangolo colla base DC ; e però devono essere ancora gli angoli alterni EDC , ACD uguali, e l' esterno BCF uguale all' interno opposto EDC .

IV. Se due linee HL , AB sono parallele ad una terza EG , faranno ancora tra di loro parallele, perchè tirata la secante $FICD$, essendo HL parallela ad EG , farà l'angolo esterno HIF uguale all' interno opposto EDC : Similmente essendo AB parallela alla stessa EG , ancora l'angolo esteriore ICB farà uguale allo stesso EDC ; dunque ancora HIF farà uguale al medesimo BCI , dunque le rette AB , HL sono parallele.

V. E' facilissimo il tirare da un dato punto C una parallela alla retta EG , perchè tirata sopra di questa qualunque retta CD , e fatto dalla parte alterna l'angolo DCA uguale a CDE , riuscirà CA parallela ad EG .

PROPOSIZIONE IX.

In qualunque triangolo ABC prolungato il lato AC in D , sarà l'angolo esterno BCD uguale alla somma delli due interni opposti CAB , ed ABC ; e iutti tre gli angoli interni sono uguali a due retti. FIG. 51.

SI tiri dal punto C la retta CE parallela al lato AB , farà l'angolo BCE uguale all' alterno ABC , e l' esteriore ECD uguale all' interno opposto CAB (*), dunque l'angolo esterno BCD ,
uguale

(*) Prop. 8.
Coroll. 3.

uguale a que'due BCE , ECD , farà pure uguale alli due interni opposti ABC , e CAB ; onde aggiuntovi di comune l' altro angolo interno ACB , faranno li tre angoli interiori uguali alli due ACB , e BCD , e però uguali a due retti. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Tutti li tre angoli d'un triangolo faranno uguali a tutti li tre angoli di qualunque altro triangolo, essendo tanto questi, che quelli a due retti uguali.

II. Anzi se due angoli d'un triangolo sono uguali a due angoli d'un' altro, ancora il terzo angolo di quello farà uguale al terzo di questo.

III. E ne' triangoli, che hanno un angolo retto, gli altri due angoli sono pure ad un retto uguali.

FIG. 53. IV. In qualunque triangolo equicrure ABC essendo gli angoli sopra la base uguali, prolungato uno de' lati uguali BC in D farà l'angolo esterno ACD duplo di qualunque degli angoli interni opposti CBA , o CAB , essendo uguale alla somma di ambidue tra loro uguali.

V. Onde nel cerchio l'angolo fatto al centro è sempre doppio di quello fatto alla circonferenza, da' medesimi punti dell' arco tirati i lati loro, cioè l'angolo DCA è duplo dell'angolo DBA ; e parimente condotto un altro raggio CE , e congiunta la retta EB , farà l'angolo DCE duplo dell' altro DBE ; onde ancora il rimanente ECA farà duplo del residuo EBA .

FIG. 54. VI. Quindi nel semicircolo, tirate due linee da' ter-

termini del diametro a qualunque punto della circonferenza, si farà ivi l'angolo retto; perchè essendo l'angolo DCA duplo di ABC , e l'altro DCE duplo di EBC , e gli due angoli DCA , e DCE , che sono uguali a due retti, essendo il doppio dell'angolo ABE descritto nel semicircolo, conviene che questo sia veramente un angolo retto.

VII. In qualunque figura rettilinea $ABDEF$ FIG. 55. tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual'è il doppio numero de' lati, levatine quattro; imperocchè, preso nella figura qualunque punto C , ed indi condotte a ciascun angolo le rette CA , CB , CD , CE , CF , ne risultano tanti triangoli, quanti sono i lati di tale figura; dunque gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati della figura; agli angoli della quale essendo congruenti quelli di tali triangoli, eccettuati quelli, che sono intorno al loro vertice C , li quali uguagliano quattro angoli retti, dunque il numero de' retti, attenenti ad essa figura, è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro.

VIII. Gli angoli poi esterni, che risultano, prolungato qualunque lato, cioè GAF , HFE , IED , KDB , LBA , in qualunque figura faranno sempre uguali a quattro retti; perchè questi con gli angoli interni fanno tante paia di retti, quanti sono i lati; dunque essendo li soli interni uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati, detrattone quattro, bisogna, che a questo numero di quattro retti corrispondano gli angoli esterni; onde gli esterni di

C

una

una figura uguagliano quelli di qualunque altra, che sia composta di più, o di meno lati.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 56. *Essendo uguali le parallele AB , DC , tirate le rette AC , BD , che ne congiungono i termini dalla stessa parte, saranno esse ancora uguali, e parallele; e dirassi questa figura un Parallelogrammo.*

Imperocchè congiunti gli angoli opposti con la retta AD , ne' triangoli ABD , ACD essendo gli angoli alterni BAD , ADC uguali, ed il lato AB uguale a DC , e l' altro AD comune ad ambidue, farà la base BD uguale alla base AC , e l' angolo BDA uguale all' alterno CAD ; dunque ancora esse linee BD , AC sono uguali, e parallele. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Vicendevolmente in qualunque parallelogrammo, che ha le linee opposte parallele AB a DC , ed AC a BD , esse linee opposte faranno uguali, perchè essendo uguali gli angoli alterni BAD , ADC , e gli altri due alterni BDA , DAC , e la retta AD comune a' triangoli ABD , ACD ; se si soprapponesse l' uno all' altro, rivoltando esso triangolo ADC , coll' angolo CDA , dalla banda A , e l' angolo CAD dalla banda D , adattandosi gli angoli uguali sopra l' uguale base DA , e AD , ancora i lati DC , AB si concorderanno insieme, e gli altri lati ancora AC , DB converranno insieme; dunque sono le opposte linee uguali nel parallelogrammo. II.

II. Ancora gli angoli opposti B , e C faranno uguali; siccome pure si uguagliano gli opposti BAC , CDB .

III. La retta AD parimente divide pel mezzo il parallelogrammo in due triangoli uguali ABD , DCA ; ed essa linea congiungente gli angoli opposti dicesi pure il diametro del parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XI.

I parallelogrammi $ACDB$, $ECDF$ eretti sopra la stessa base CD , e tra le medesime parallele AF , CD , sono uguali tra loro. FIG. 57.

Imperochè le due rette AB , EF essendo alla opposta CD uguali, faranno uguali tra loro, ed aggiunta all'una, e all'altra la BE , sarà AE uguale a BF ; ed è pure AC uguale a BD , e l'angolo esterno DEF uguale all'interno CAE ; dunque sono uguali i triangoli ACE , BDF , e nella prima figura segandosi in G le rette CE , BD , tolto di comune BGE a' detti triangoli, rimangono uguali i trapezj $ABGC$, ed $EGDF$, onde aggiunto ad essi di comune l'altro triangolo CGD , rimane il parallelogrammo $ACDB$ uguale all'altro $ECDF$; ma nella seconda figura aggiunto il trapezio $CEBD$ a quei triangoli uguali ACE , BDF , riesce pure il parallelogrammo $ACDB$ uguale all'altro $ECDF$. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se con gl'intervalli de' lati uguali AC , BD del parallelogrammo $ACDB$, si descriveranno

C 2

den~

dentro le parallele due archi circolari uguali CE , DF , farà ancora la figura $CEFD$, compresa da detti archi, e dalle medesime parallele, uguale al parallelogrammo $ACDB$, perchè essendo uguali i settori ACE , BDF , tolta nella prima figura la porzione BGE , ed aggiunta CGD , riesce $ABDC$ uguale a $CEFD$; e nella figura seconda aggiunto a quei settori lo spazio $CEBD$, riesce pure $ACDB$ uguale a $CEFD$.

FIG. 60. Lo stesso accade ne' semicircoli interi tra loro uguali AEC , BFD tra le stesse parallele descritti; perchè aggiuntovi lo spazio $CEABD$, riesce il parallelogrammo $ACDB$ uguale pure alla figura $CEABFD$; e così pure seguirebbe, se vi fossero altre curve simili, ed uguali.

FIG. 61. II. Se i parallelogrammi $ABDC$, $EFIH$ sopra le basi uguali CD , HI , sono descritti tra le medesime parallele CI , AF , essi pure saranno uguali; imperocchè essendo EF uguale ad HI , farà pure uguale a CD , e congiunte le rette CE , DF , si farà il parallelogrammo $CEFD$, cui farà uguale $ABCD$, avendo con esso la stessa base CD ; e gli farà ancora uguale $EFIH$, avendo con esso la stessa base EF ; dunque $ABDC$ è uguale ad $EFIH$.

FIG. 62. III. Quindi, se si adattano alli due lati AC , BD gli archi circolari uguali AMC , BND , ed agli altri lati EH , FI , altri archi uguali EK , FL , o altre curve pari, farà similmente lo spazio $AMCDNB$ uguale all' altro $EKL F$, essendo quello uguale al parallelogrammo $ABDC$, e quest' altro uguale all' altro parallelogrammo $EFIH$, uguale a quello; e se questi archi si se-

ga-

gano in G , ancora tolto KGD , resta $CMABNGK$ uguale all' altro spazio $EGDLF$.

PROPOSIZIONE XII.

I triangoli CAD , CED sopra la stessa base CD descritti, co' vertici A , E nella medesima retta parallela alla sua base, saranno uguali; ed ancora i due triangoli CAD , DFG fatti nelle medesime parallele sopra basi uguali CD , DG sono uguali. FIG. 63.

Imperocchè tirata la CB parallela a DA , e la DF parallela a CE , saranno li due parallelogrammi $ABCD$, $EFDC$ uguali; ma il triangolo CAD è la metà del primo parallelogrammo, e l' altro triangolo CED è la metà del secondo, dunque essi triangoli sono uguali. E similmente paragonato il parallelogrammo $ABCD$ ad un altro $EFGD$, che hanno le basi uguali nelle medesime parallele, si trovano uguali; dunque ancora i triangoli CAD , DFG , che sono la metà di essi, devono essere uguali. Il che &c.

COROLLARI.

I. In qualunque triangolo DAC , divisa pel mezzo in E la base DC , e congiunta al vertice la AE , sarà esso triangolo diviso in due triangoli uguali DAE , CAE ; e nel triangolo BAC divisa in tre parti la base BC ne' punti D , E , e congiunte al vertice le rette AD , AE , resta diviso esso triangolo in tre triangoli uguali; e similmente divisa la base in quante parti uguali si voglia, resterà diviso il triangolo con le rette FIG. 64.

condotte al vertice in altrettanti triangoli uguali, per essere il loro vertice nella medesima linea AF parallela alla base.

FIG. 65. II. Dato un punto D nel lato AB del triangolo ABC , si può da esso tirare una linea, che tagli dal medesimo triangolo qualunque richiesta parte: in questa maniera. Congiunta all'angolo C opposto la retta CD , e nel lato AB presa la porzione BF , che sia tal parte di esso lato, quale si vorrebbe essere la porzione del triangolo da segarsi pel punto D ; per esempio se si vuole essere il terzo, sia BF la terza parte di BA , e condotta FE parallela a DC , segante il lato BC in E , si congiunga DE ; farà il triangolo BED quella porzione, che si voleva dell'intero ABC , cioè la terza parte di esso: perchè congiunta CF farebbe BCF un terzo di BCA ; ed essendo EDF uguale ad ECF , aggiunto BEP all'uno, e all'altro, sarà pure BED uguale a BCF ; dunque ancora BED è la terza parte del triangolo ABC ; e così di qualunque altra porzione può farsi.

FIG. 66. III. Volendosi fare al triangolo ABG un parallelogrammo uguale, divisa la base BG per mezzo in C , e per il vertice A condotta la AE parallela alla base BG , sopra la BC metà della base tirate alla parallela due altre linee parallele BE , CF , farà $BCFE$ uguale al dato triangolo ABG ; perchè congiunta la CA , e la BF , tanto $BCFE$ è doppio del triangolo BFC , che BAG è doppio di BAC , e sono BFC , BAC triangoli uguali, dunque ancora BAG è uguale al parallelogrammo $BCFE$. che pure è il doppio di

di qualunque triangolo BAC sopra la stessa, o sopra ugual base, e tra le medesime parallele posto, siccome è il doppio del triangolo BFC fatto dal suo diametro.

IV. Quindi ogni triangolo ABG è uguale al prodotto della metà di sua base nella perpendicolare, condottavi sopra dal vertice; perchè sopra la base BG condotta la perpendicolare AD , ed alla stessa AD tirate parallele BE , e CF da' termini della BC , metà della base BG , è il triangolo uguale al parallelogrammo rettangolo $BCFE$, che è il prodotto della metà di essa base BC nel lato CF , uguale alla perpendicolare AD .

FIG. 67.

V. Onde può trovarsi la misura di qualunque spazio rettilineo $AFBGC$, tirate le rette da un angolo agli altri, come AB , AG , dividendolo in più triangoli AFB , ABG , AGC , li quali possono misurarsi, tirando le perpendicolari sopra le loro basi, e moltiplicando essa perpendicolare con la metà della base. Per esempio, se AB è uguale ad 8 braccia, e la perpendicolare FH fosse 3 braccia, moltiplicando il 3 nella metà di 8, cioè in 4, si fa 12 braccia quadre, per misura del triangolo AFB ; se BG è di 6 braccia, e condottavi la perpendicolare AD , che sia braccia 7, moltiplicando 7 nella metà di 6, che è 3, si fa 21 braccia quadre, che è la misura del triangolo ABG ; ed essendo AG braccia 10, la di cui metà è 5, condottavi la perpendicolare CE uguale a 4; moltiplicandosi si fanno 20 braccia per misura del triangolo AGC ; onde tutto lo spazio rettilineo $AFBGC$ comprenderà 53 braccia quadre, essendo tale il complesso di 12,

C 4

e 21

e 21, e 20, ritrovate in que' triangoli ivi compresi.

FIG. 68.

VI. Finalmente si cava da questa proposizione, che se sopra la medesima linea retta BF fossero con la stessa base, o con le basi uguali BC , EF due triangoli uguali BAC , EDF , la retta AD , che congiunge i loro vertici, sarà parallela alla base; imperocchè se dal punto A tirata una tale parallela, non passasse per l'angolo D , ma segasse il lato ED sotto, o sopra in G , congiunta FG , farebbe il triangolo EGF uguale all'altro BAC , e però ancora ad EDF , onde farebbe la parte uguale al tutto; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XIII.

In qualunque parallelogrammo $AFGH$ tirato il diametro AG , e per un punto D di esso tirate le parallele a' lati BDE , CDI , riusciranno uguali i parallelogrammi $EDCF$, $BDIH$, che diconsi Complementi di esso parallelogrammo $AFGH$.

TAV. V.
FIG. 69.

Imperocchè essendo il triangolo AGF uguale all'altro AGH , e ne' parallelogrammi $ACDB$, ed $IDEG$ essendo il triangolo ADC uguale a DAB , e l'altro DEG uguale a DIG ; dunque il resto $EDCF$ è uguale al residuo $BDIH$, che sono i Complementi.

COROLLARI.

FIG. 70. I. Dato un triangolo LFN , si può fargli uguale un parallelogrammo di qualunque lunghezza, e con

o con qualsivoglia angolo dato; perchè nella retta della base FN presa FE uguale alla metà di essa, e fatto l'angolo EFC uguale al dato, indi tirata ED parallela ad FC , le quali concorrano con la CL tirata dal vertice L parallela alla base, riuscirà il parallelogrammo $EFCD$ uguale al dato triangolo FLN <sup>(a) Corol. 3.
Prop. 12.</sup>; e prolungata la CD in I , sicchè sia DI uguale alla proposta lunghezza, che si vuole abbia il parallelogrammo uguale al dato triangolo, si compisca il parallelogrammo $DIGE$, e tirato il diametro GD , che convenga con il lato FC in A , si tiri AH parallela alla stessa DI , segata da' lati ED , GI , in B , H , farà il parallelogrammo $IDBH$ uguale ad $EFCD$ (essendo questi i complementi di $AFGH$) e però uguale al triangolo LFN ; ed ha la lunghezza data DI , e l'angolo BDI uguale ad EDC , ed al dato CFE <sup>(b) Corol. 2
Prop. 10</sup>; dunque si è fatto ciò, che chiedevasi

II. Così ancora qualunque figura rettilinea può ridursi in un parallelogrammo di qualche data lunghezza, e con l'angolo dato, potendo essa figura misurarsi, come si è fatto nel Corollario V. della precedente Proposizione, e però ridursi ancor essa in un triangolo, che abbia la detta misura: Per esempio, in quel Corollario essendosi trovata quella figura rettilinea uguale a 53 braccia quadre, può ridursi ad un triangolo, che abbia 12 braccia per base, ed 8 con $\frac{1}{2}$ di braccio per altezza, perchè la metà della base essendo braccia 6, e la perpendicolare $8\frac{1}{2}$, moltiplicando questa in quella, ne riesce 53 braccia quadre, misura di quello spazio rettilineo.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 71. *Nel medesimo segmento ABDE di un cerchio, ciaschedun angolo ABE, ADE, fatto nell' arco circolare con le rette condotte a' termini della sua corda AE sarà di uguale grandezza.*

PErchè condotti al centro i raggi AC, EC , l'angolo è doppio di qualunque altro ABE , o ADE fatti all' arco ^(a); dunque essi angoli nel medesimo segmento sono tra di loro uguali. Il che &c.

^(a) Corol. 5.
Prop. 9.

C O R O L L A R J.

I. Viceversa, se gli angoli fatti sopra la medesima retta AE , cioè ABE, ADE , sono uguali, per gli stessi punti A, B, D, E , potrà passare il medesimo arco circolare; perchè se passasse solamente per li tre punti A, E, D , ma non pel quarto B , anzi segasse la retta EB in F , congiunta AF , riuscirebbe l'angolo AFE uguale ad ADE , essendo nel medesimo segmento; dunque ancora AFE farebbe uguale all' interno opposto ABF ; il che è impossibile ^(b).

^(b) Corol. 1.
Prop. 8.

II. Qualsivoglia quadrilatero $ABCD$ inscritto nel cerchio ha gli angoli opposti uguali a due retti; perchè tirate le rette AC, BD , gli angoli

FIG. 72. ACB, ADB , che sono nel medesimo segmento circolare, faranno uguali, e sono uguali ancora li due ACD, ABD ; dunque l'angolo DCB , che è uguale alli due ACB, ACD , uguaglia li due ADB, ABD ; dunque aggiuntovi l'angolo BAD , li due angoli opposti DCB , e BAD sono

no

sono uguali agli angoli del triangolo ABD ; dunque sono due retti.

III. Prolungato fuori del cerchio il lato BA in E , sarà l'angolo esterno EAD uguale all'interno opposto DCB , perchè ancora EAD con lo stesso BAD fa due angoli retti.

IV. Dunque se in un quadrilatero li due angoli opposti sono uguali a due retti, potrà passare un cerchio per li quattro angoli di esso; perchè se passasse per gli tre punti A, B, C , ma non per D , anzi segasse la retta CD in F , congiunta AF , farebbero gli angoli ABC, AFC uguali a due retti, ma sono a ciò uguali questi due ABC, ADC , dunque farebbe l'angolo ADC uguale all'altro AFC ; il che è impossibile, essendo l'esterno maggiore dell'interno opposto nel triangolo ADF .

PROPOSIZIONE XV.

*Se la retta AF tocca il cerchio in A , e la ret- FIG. 73.
ta AD sega esso cerchio in D , l'angolo FAD fatto dalla tangente, e dalla secante, sarà uguale all'angolo ABD fatto nell'alterna porzione del cerchio; e così ancora l'angolo EAD sarà uguale all'angolo AGD fatto nell'altro alterno segmento.*

Imperocchè congiunto il contatto A col centro C , e tirato il diametro ACB , congiunta la BD , sarà l'angolo ADB retto ^(a), dunque li due susseguenti di esso triangolo, ABD , e DAB sono uguali ad un retto, cioè all'angolo BAF , che comprende appunto li due DAF , e DAB ;
dun-

(a) Corol. 6.
Prop. 9.

(a) *Corol. 2.*
Prop. 14.

dunque DAF bisogna che sia uguale all' altro ABD , fatto nell' alterno segmento; . e perchè ancora AGD con ABD sono uguali a due retti (a), e però alli due DAF , DAE essendo DAF uguale ad ABD , l' altro DAE farà pure uguale ad AGD ; dunque l' angolo contenuto dalla tangente, e da qualunque secante uguaglia l' angolo, che riesce nell' alterno segmento del cerchio. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Quindi è chiaro, che essendo il segmento, un mezzo cerchio, l' angolo ADB in esso descritto uguaglia l' angolo retto CAE ; nel segmento poi maggiore l' angolo ABD è sempre acuto, perchè uguaglia l' angolo DAF ; e nel segmento minore l' angolo AGD è ottuso, uguagliando l' angolo GAE , maggiore del retto CAE ,

II. Quindi ancora si ha, come si possa dal cerchio dividere una porzione capace d' un angolo dato, bastando dal contatto tirare una retta, che faccia con la tangente l' angolo dato, perchè così il segmento segato da quella retta averà in se quell' angolo, che è proposto, dalla parte alterna, e dalla medesima farà il segmento capace dell' altro angolo, che con quello dato compisce due retti.

III. E se sopra la data retta AD si dovrà fare un segmento circolare, capace d' un angolo dato, facendo il dato angolo DAF , e sopra la AF eretta la perpendicolare AB , ed indi all' angolo rimanente DAB fatto sopra la AD l' angolo uguale ADC , convenendo la retta DC con

con AB in C , descritto dal centro C con l'intervallo CA , il circolo ADB , farà il segmento ABD sopra la retta data AD eretto, capace del dato angolo DAF .

IV. Volendo nel cerchio ABG descrivere un triangolo, che abbia ciascuno de' suoi angoli uguale a ciascuno degli angoli d' un triangolo dato MLN , tirata la tangente EAF , e fatto l'angolo BAF uguale ad MLN , e l'angolo GAE uguale all' altro LMN , segandosi il cerchio da queste rette in B , e G , congiunta GB , farà il triangolo AGB equiangolo al dato MLN , perchè l'angolo AGB farà uguale a BAF , cioè ad MLN , e l'angolo ABG uguale all' altro GAE , cioè ad LMN ; e però il rimanente GAB farà uguale al residuo LMN .

FIG. 74.

PROPOSIZIONE XVI.

In un dato cerchio descrivere un quadrilatero $ABED$, rettangolo, ed equilatero, il quale si nomina Quadrato.

FIG. 75.

Condotti per lo centro C due diametri AE , BD , che s'eghinsi in C perpendicolarmente, cioè ad angoli retti; congiunte quindi le rette AB , BE , ED , DA , farà fatto il quadrato, che è un parallelogrammo, rettangolo, ed equilatero; imperocchè ne' triangoli ACB , BCE , ECD , DCA essendo uguali tutti gli angoli retti in C , ed uguali tutti i lati de' raggi CA , CB , CE , CD , ancora tutte le loro basi AB , BE , ED , DA faranno uguali; dunque è equilatero; e perchè tutti gli angoli ABE , BED , EDA , DAB sono ne'

semi-

femicircoli, tutti sono retti; dunque le linee opposte sono parallele, e tutto esso parallelogrammo equilatero è ancora rettangolo; e però dicesi quadrato.

C O R O L L A R J .

FIG. 76. I. Se si volesse sopra a una data linea AB fare il quadrato, gli si alzi dal termine A la perpendicolare AD uguale alla AB , e tirata la DE parallela ad AB , e la BE parallela ad AD , farà fatto il quadrato $ABED$; perchè essendo $ABED$ un parallelogrammo, in cui i lati opposti sono uguali, AB a DE , e BE ad AD , siccome AB , ed AD sono uguali, ancora ciascuno degli altri due sarà uguale alla AB ; ed essendo gli angoli interni tra le parallele uguali a due retti, siccome si è fatto retto BAD , farà pure retto ABE , e BED , ed ADE ; dunque è questo quadrilatero di lati uguali, e di ciascun angolo retto, e però è il Quadrato.

FIG. 77. II. Quindi è chiaro, che in ogni parallelogrammo, se un angolo è retto, ciascun altro di esso deve esser retto.

III. Al dato cerchio $ABED$ volendo circoscrivere un quadrato, condotti per lo centro C li diametri AE , BD perpendicolarmente, cioè ad angoli retti, si tirino per li punti A, B, E, D le tangenti GAF , FBI , IEH , HDG , che faranno parallele a' diametri opposti, facendo pure con li semidiametri angolo retto. Sarà esso $GFIH$ il quadrato circoscritto, essendo qualunque di tali lati uguale al diametro opposto, onde siccome sono uguali i diametri, così essi lati
tan-

tangenti, paralleli ad essi, devono essere uguali; e qualunque angolo AGD è retto nel parallelogrammo $ACDG$ (che pure è un quadrato minore) siccome gli altri angoli ACD , CDG , CAG sono retti; dunque $GFIH$ è rettangolo, ed equilatero, onde è il quadrato circoscritto al cerchio.

IV. È manifesto, che il quadrato circoscritto al cerchio è doppio dell' altro inscritto $ABED$, perchè ogni quadrato del raggio è doppio del suo triangolo, cioè $ACDG$ doppio di ACD , ed $ACBF$, doppio di ACB ; e $BIEC$ doppio di BCE ; ed $EHDC$ duplo di ECD ; dunque li quattro quadrati de' raggi compiendo il quadrato $GFIH$ circoscritto al cerchio, e li 4 triangoli suddetti compiendo il quadrato inscritto $ABED$, bisogna che quello sia duplo di questo.

V. Si può ancora inscrivere nel cerchio un parallelogrammo rettangolo, ma non equilatero, come tirati due diametri per lo centro C , non perpendicolarmente, ma inclinati l' uno all' altro AL , NH , e congiunte le rette AN , HL , che faranno uguali essendo basi de' triangoli ACN , HCL composti intorno ad angolo uguale con raggi uguali, e tirate pure le altre due AH , NL , che pure sono uguali basi de' triangoli ACH , NCL , composti con uguale angolo di raggi uguali; si averanno le parallele AN , HL , ed NL , AH ; e si congiungono ad angoli retti AHL , HAN , ANL , NLH , essendo fatti ne' semicircoli, onde ne risulta il parallelogrammo $AHLN$, ch'è rettangolo, ma non quadrato, perchè i lati HL , AN , opposti all' angolo ottuso, sono maggiori degli altri

FIG. 78.

altri due AH, NL opposti all' angolo acuto. Ma simile rettangolo non equilatero, cioè non quadrato, non può essere circoscritto al cerchio, non potendo tirarsi al cerchio dal medesimo punto le tangenti disuguali (*a*).

(*a*) *Corol. 5.*
Prop. 6.

VI. Viceversa può circoscriversi al cerchio

FIG. 79. un parallelogrammo non rettangolo $BDEF$, tirate le tangenti da i termini de' due diametri AL, HN , inclinati l' uno sopra l' altro, perchè faranno parallele BD ad EF , facendo angoli retti col diametro AL , e BF , ed ED , che fanno angoli retti col diametro NH ; ma non sono essi lati congiunti ad angoli retti, essendo l' angolo ABH , e l' opposto NEL angoli ottusi, perchè nel quadrilatero $ACHB$, e nell' altro $NCLE$ sono gli angoli in C acuti, che con l' opposto fanno due retti, come sono retti gli altri due CAB, CHB , ed altresì CNE , e CLE fatti da' raggi colle tangenti; e parimente gli angoli ADN , ed HFL sono acuti, come gli opposti ACN, HCL sono ottusi; dunque tale parallelogrammo $BDEF$ circoscritto al cerchio non è rettangolo; ma dentro al cerchio non potrebbe iscriversi un simile parallelogrammo, perchè essendo retti gli angoli fatti nel semicircolo sopra i diametri, non possono essere che rettangoli i parallelogrammi iscritti.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 80. *Data qualunque figura rettilinea MNOPQ, circoscrivere ad un dato cerchio una figura di altrettanti lati, equiangola ad essa.*

Si

SI prolunghi ciascun lato della data figura al di fuori, NM in R , ON in S &c. Tutti questi angoli esterni essendo uguali a quattro retti ^(a), si potranno descrivere intorno al centro C del cerchio; ivi dunque condotto qualunque raggio CB , si faccia l'angolo BCF uguale a QMR , poi l'angolo BCD uguale ad MNS , indi l'angolo DCE uguale ad NOT , poi ECA uguale ad OPV , ed il rimanente ACF farà uguale all'ultimo residuo PQX ; indi da' termini di questi raggi condotte le tangenti, con cui faranno angoli retti, ne risulterà la figura $HIKLG$ circonscritta al cerchio, la quale farà equiangola alla figura data $MNOPQ$ con altrettanti lati; imperocchè in qualunque quadrilatero $FCBH$ essendo gli angoli in F , e B retti, gli altri due opposti BCF , FHB faranno uguali a due retti, e però uguali alli due QMR , QMN ; ed è BCF uguale a QMR , dunque l'altro FHB deve essere uguale a QMN . Similmente si proverà essere l'angolo BID uguale ad MNO , e l'altro DKE uguale ad NOP ; e così gli altri si mostreranno uguali; dunque si è circonscritta al cerchio la figura equiangola alla data. Il che &c.

(a) *Corol. 2.
Prop. 9.*

C O R O L L A R J .

I. Se il dato Poligono avesse tutti gli angoli uguali M, N, O, P, Q al di dentro, averebbe pure al di fuori uguali gli esterni; e però farebbero uguali gli angoli fatti al centro C del cerchio; onde gli archi corrispondenti FB, BD, DE &c. sarebbero uguali, e le tangenti FH, HB del primo uguaglierebbero le tangenti BI, ID del

del secondo, e così le altre; dunque i lati ancora HI , IK , KL , LG , GH riuscirebbero uguali; e però il poligono circoscritto sarebbe equiangolo, ed equilatero.

II. Congiunte poi le rette FB , BD , DE , EA , AF riuscirà un poligono pure equilatero, ed equiangolo inscritto nel cerchio, se tale è il circoscritto; ma se il circoscritto non ha gli angoli uguali, non essendo esso equilatero, l'inscritto non averà ne meno gli angoli uguali all' corrispondenti del circoscritto, o del dato $MNOPQ$. Imperocchè, condotte le rette CH , CG , CL &c. queste dividono per mezzo gli angoli della figura circoscritta, mentre le due tangenti dal medesimo punto, come GA , GF , sono uguali, il raggio CA uguale a CF , e la CG comune ad ambidue i triangoli CAG , CFG , e però l'angolo ancora CGA è uguale a CGF ; e similmente CLA uguale a CLE &c. dunque se l'angolo AGF non è uguale all'angolo ALE , non farà la metà del primo uguale alla metà del secondo; e però la metà dell'uno con quella dell'altro non fa un angolo uguale a veruno di essi; ma l'angolo FAE uguaglia le due metà di detti angoli CGF , CLE , perchè nel quadrilatero $CFGA$ essendo li due angoli opposti uguali a due retti, come CFG , CAG , potrebbe passare un cerchio intorno a quei quattro punti C , F , G , A ^(a), e però l'angolo CGF farà uguale a CGA . E similmente circoscritto un cerchio intorno al quadrilatero $ACEL$, l'angolo CAL deve essere parimente uguale a CLE ; dunque esso angolo FAE non può essere uguale, ne ad AGF , ne ad ALE , essendo

(a) Corol. 4.

Prop. 14.

essendo compreso dalla metà dell' uno, e dalla metà dell' altro.

III. Volendo inscrivere un cerchio dentro qualsivoglia triangolo EHF , divisi per mezzo due de' suoi angoli FEH , FHE con le rette EC , HC convenienti in C , e condotte dal punto C sopra i lati le perpendicolari CA , CD , CB , faranno esse tra di loro uguali, perchè il triangolo CEB rivoltandosi sopra il conseguente CEA , per essere l'angolo BEC uguale ad AEC , si uniranno insieme le rette EB , EA , e non potendo il retto angolo CBE adattarsi sopra la retta EH fuori del retto angolo CAE , converranno insieme; onde la CB farà uguale alla CA ; e similmente ancora CD si proverà uguale alla CA , poichè essendo l'angolo CHD uguale a CHA , rivoltandosi HDC sopra il triangolo HAC , parimente converranno HD con HA , e CD con la stessa CA , non potendo l'angolo retto cadere altrove; dunque le tre perpendicolari essendo uguali, col centro C , e col raggio CB descritto un cerchio, passerà per li punti B , A , D , e farà toccato da' lati EF , EH , HF perpendicolari a' suoi raggi; onde farà inscritto esso cerchio nel triangolo dato.

FIG. 81.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se sopra i lati AB , BC del triangolo ABC si faranno due qualsivoglia parallelogrammi $ABHG$, e $BCEF$, li cui lati opposti a' lati AB , BC del triangolo, convengano in I , condotta pel vertice B del triangolo la retta IBD , a cui da' termini A , C si conducano parallele AK , CM , con-

FIG. 81.

correnti con effe GH, EF, in K, M, congiunta KM, farà ACMK un parallelogrammo sopra la base uguale alli due parallelogrammi ABHG, BCEF, fatti sopra i lati del dato triangolo.

Imperocchè, essendo tanto AK , che CM parallele, ed uguali a BI , per essere tanto $BAKI$, che $BIMC$ parallelogrammi, deve riuscire KM parallela alla AC , dunque $ACMK$ è un parallelogrammo, di cui la parte $DCML$ è uguale a $CMIB$, il quale pure è uguale a $CBFE$, essendo li due primi sopra la stessa base CM , e tra le medesime parallele CM, DI , e questi altri due secondi sopra la medesima base CB , e tra le stesse parallele CB, EI ; ed ancora il rimanente $ADLK$ è uguale ad $AKIB$, avendo la stessa base AK tra le parallele AK, DI , ed altresì $AKIB$ è uguale ad $ABHG$, essendo sulla medesima base AB , e tra le stesse parallele AB, GI ; dunque $DCML$, ed $ADLK$, cioè tutto il parallelogrammo $ACMK$ è uguale alli due parallelogrammi $CBFE$, ed $ABHG$. Il che &c.

C O R O L L A R J.

FIG. 83. **I.** Nel Triangolo rettangolo ABC descritti li quadrati de' lati AB, CB , che sono $ABHG$, e $CBFE$, sono questi uguali al quadrato della base AC ; imperocchè il parallelogrammo $ACMK$ descritto, come in questa proposizione, che è uguale a que' due parallelogrammi quadrati, si prova essere appunto il quadrato della Ipotenusa AC ; perchè essendo FB uguale a BC , ed FI uguale alla parallela ZH , la quale è uguale a BA ; ed

ed essendo l'angolo BFI retto uguale al retto CBA , ne segue, che ancora BI base del triangolo FBI è uguale ad AC base di ABC ; ed è BI uguale alla parallela CM , dunque AC , e CM sono uguali; ed ancora essendo l'angolo FBI uguale all'angolo BCA , e l'angolo IBH uguale a BCM , cioè l'esterno all'interno opposto nelle parallele; dunque l'angolo FBH , che è uguale al retto ABC , è uguale all'angolo ACM , il quale però sarà retto; e così pure faranno retti gli altri CAK , CMK , AKM ; dunque tale parallelogrammo $ACMK$ è equilatero, e rettangolo; e però il quadrato della base AC è uguale alli due quadrati de' lati AB , CB . Il che &c.

II. La retta IBD è perpendicolare alla base AC , essendo parallela ad MC , e ad AK , che fanno angolo retto colla medesima base; onde il quadrato $BCEF$ del lato BC è uguale al rettangolo $CDLM$, e l'altro quadrato $ABHG$ del lato AB è uguale al rettangolo $ADLK$, essendo $BCEF$ uguale a $BCMI$, e questo a $CDLM$, come si è mostrato di sopra; onde essendo CM uguale a CA , il rettangolo di AC in CD uguaglia il quadrato del lato CB , ed il rettangolo della stessa AC in AD (le quali parti CD , AD , sono divise dalla perpendicolare BD condotta sulla base dal vertice del triangolo rettangolo) uguaglia l'altro quadrato del lato AB ; ed essendo questi due quadrati, e questi due rettangoli uguali al quadrato di AC , se ne deduce, che il quadrato d'una linea AC divisa in D è uguale a' rettangoli di AC in AD , e di AC , in DC .

D 3

III.

FIG. 84. III. Viceversa, se in un triangolo ABC i quadrati de' due lati AB , e BC sono uguali al quadrato della base AC , bisogna che l'angolo ABC sia retto; imperocchè facendo dall'altra parte l'angolo retto ABD , e presa BD uguale a BC , congiunta AD , farà il quadrato AD uguale a' quadrati AB , BD , ma questi sono gli stessi che AB , BC , dunque il quadrato AD è uguale al quadrato AC ; e però essendo uguale ancora AD ad AC , e gli triangoli ABC , ABD avendo ciascun lato uguale al suo corrispondente, farà l'angolo pure ABC uguale all'angolo retto ABD .

FIG. 85. IV. Dati più quadrati delle linee A, B, C, D , si potrà trovarne uno uguale a tutti; poichè posta EF uguale ad A , e ad angolo retto postavi FG uguale a B , congiunta EG , averà questa il suo quadrato uguale alli due EF , FG , che sono gli stessi quadrati di A , e B ; e posta ad angolo retto sopra la EG la retta GH uguale a C , e congiunta EH , farà il suo quadrato uguale a' quadrati EG , GH , cioè a quelli di A , di B , e di C ; e similmente posta IH uguale a D sopra la EH ad angolo retto, congiunta la EI , farà il suo quadrato uguale a' quadrati di EH , e di HI , cioè a tutti li quadrati di A , di B , di C , e di D ; e così se altri ve ne fossero, si troverebbe il quadrato uguale alla somma di tutti.

FIG. 86. V. Dal quadrato di AB volendo levare il quadrato AD , e trovare il quadrato uguale all'eccesso di quello sopra questo, si descriva il semicircolo ADB sopra il diametro AB , ed in esso adattata la retta AD , si congiunga BD ; il qua-

quadrato di questa farà l'eccesso del quadrato AB sopra il quadrato AD , essendo l'angolo ADB retto, e però esso quadrato AB uguale ad ambidue i quadrati AD , e BD .

P R O P O S I Z I O N E X I X .

Se la retta AB è divisa in E , il quadrato di AB , che sia $ABCD$, sarà uguale a' quadrati delle parti AE , EB , con due rettangoli fatti da una parte nell'altra. TAV. VI.
FIG. 87.

SI conduca il diametro AC , e dal punto E tirata la EG parallela a BC , segante AC in I , per il punto I si tiri la FIH parallela ad AB . Sarà $AEIF$ il quadrato di AE , ed IHC il quadrato di I , cioè dell'altra parte EB ; imperocchè, essendo AB uguale a BC , l'angolo BAC è uguale a BCA , ma a questi pure sono uguali gli angoli CIH , AIE , essendo gli esterni uguali agl'interni opposti nelle parallele; dunque ancora IE è uguale ad AE , e CH uguale ad HI ; ed essendo AEI , IHC angoli retti uguali ad ABC , dunque li parallelogrammi $AEIF$, IHC sono equilateri rettangoli, e però tutt'uno con i quadrati di AE , e di EB uguale ad I ; ma li rettangoli $BEIH$, $IFDG$ sono pure uguali ^(a), e composti dalle parti AE , EB ; dunque il quadrato di AB , cioè $ABCD$, è uguale a quadrati delle parti AE , EB , ed a' due rettangoli di una parte nell'altra, pareggiando li due quadrati $AEIF$, $HCGI$, con li due rettangoli $BEIH$, $IFDG$ Il che &c.

C O R O L L A R J.

FIG. 88. I. Per qualunque punto I preso nel diametro del quadrato, condotte le parallele a i lati, ne riesce pure un quadrato, essendosi mostrato, essere $AEIF$ il quadrato di AE , ed $IHCG$ il quadrato di IH ; ed ancora presi nel diametro due punti I, O , e condotte le parallele a i lati, riuscirà $INOM$ un quadrato di IN &c.

II. La differenza di due quadrati AB , ed AE uguaglia il rettangolo della somma de' lati nella loro differenza; perchè prolungata GIE in EL uguale ad IE , e compiuto il rettangolo $CGLK$, farà $LEBK$ uguale ad $IEBH$, cioè ancora ad $FIGD$, ed è $FIGD$ con $GEBC$ la differenza del quadrato $ABCD$ dall' altro $AEIF$; dunque ancora $LEBK$ con $GEBC$, cioè $CGLK$ rettangolo fatto dalla GL uguale alla somma di AB , ed AE (essendo GE uguale a CB , e però ad AB , ed essendo EL uguale ad EI , e però ad AE) nella LK uguale alla differenza di AB , ed AE , (essendo LK uguale ad EB , che è AB meno AE) farà uguale alla differenza del quadrato AB dal quadrato AE .

FIG. 89. III. Segata la retta AB per mezzo in C , e preso in essa un altro punto D , il rettangolo ADB col quadrato CD farà uguale al quadrato CB ; imperocchè essendo AC uguale a CB , la retta AD è la somma di CB , e CD , e la retta DB è la differenza delle stesse; dunque il rettangolo ADB è l' eccesso del quadrato CB sopra il quadrato CD , e però aggiunto all' uno, ed all' altro il quadrato CD , farà il rettangolo

ADB

ADB col quadrato CD uguale al quadrato CB , che contiene esso quadrato CD col detto eccello.

IV. Ma se fosse preso il punto D nella retta FIG. 90. AB , prolungata, e divisa per mezzo AB in C , farà il rettangolo ADB col quadrato CB uguale al quadrato CD ; imperocchè AD è la somma di CD , e di CB , e la BD è la loro differenza; dunque il rettangolo ADB uguaglia l'eccesso del quadrato CD sopra il quadrato CB ; onde all'uno, ed all'altro aggiunto il quadrato CB , farà il rettangolo ADB col quadrato CB uguale al quadrato CD .

V. Nel triangolo Ifofcele AEB condotta dal FIG. 91. vertice E sopra la base AB la retta ED , se viene al di dentro, farà il rettangolo ADB col quadrato ED uguale al quadrato EB ; ma se passa per di fuori, il rettangolo ADB col quadrato EB farà uguale al quadrato ED ; imperocchè tirata la perpendicolare EC sopra la base AB , che la divide pel mezzo, nel primo caso il rettangolo ADB col quadrato DC uguaglia il quadrato CB , ed aggiunto di quà, e di là il quadrato EC , farà il rettangolo ADB col quadrato DC , e col quadrato EC (cioè ADB , col quadrato ED , che uguaglia i due quadrati DC , ed EC) uguale al quadrato CB col quadrato CE , cioè al quadrato EB uguale ad essi; e similmente nel secondo caso, essendo il rettangolo ADB col quadrato BC uguale al quadrato CD , aggiunto il quadrato della perpendicolare EC , farà ADB col quadrato EB (uguale alli due BC , ed EC) uguale a' quadrati CD , ed EC , cioè al quadrato ED .

VI.

FIG. 91.

VI. Due rette AB , GF , che si segano in D dentro a un cerchio, averanno uguali i rettangoli delle loro parti ADB , FDG ; imperocchè congiunti i raggi CA , CB , e CF , CG , e tirata dal centro la retta CD , ne' triangoli Ifofceli ACB , ed FCG tanto il rettangolo ADB col quadrato CD uguaglia il quadrato del raggio CB , quanto il rettangolo FDG col quadrato CD uguaglia il quadrato dell' altro raggio CG ; ma tali quadrati de' raggi sono uguali, dunque ancora i rettangoli ADB , FDG sono uguali, mentre con lo stesso quadrato CD si uguagliano al quadrato del raggio; e se pure due rette AD , FD convengono fuori del cerchio in D , faranno parimente uguali i rettangoli ADG , FDB ; perchè congiunta la CD , tanto farà ADG col quadrato del raggio CG uguale al quadrato CD , quanto ancora il rettangolo FDB col quadrato del raggio CB farà uguale allo stesso quadrato CD .

VII. Se dallo stesso punto D fuori del cerchio è condotta la tangente DH , e qualunque secante DA , farà il quadrato della tangente uguale al rettangolo della secante AD , e della esterna parte DG ; perchè congiunto il raggio CH , farà il quadrato CD uguale al quadrato DH col quadrato del raggio CH ; ma era ancora dimostrato uguale il quadrato CD al rettangolo ADG col quadrato del raggio CG ; dunque esso quadrato della tangente DH è uguale al rettangolo ADG , o a quello di qualunque altra secante FDB .

VIII. Vicendevolmente, se due rette AB , FG si segano in D , in maniera, che il rettangolo ADB uguagli il rettangolo FDG , dovrà passare un

un cerchio per li quattro punti A, G, B, F ; ed ancora se due rette AD, FD siano segate in G . e B in maniera, che li rettangoli ADG, FDB siano uguali, parimente passerà il cerchio per detti punti; perchè se passasse per tre soli di essi, e non pel quarto, ma segasse una di tali linee in un altro punto, farebbe il rettangolo primo uguale ad un altro maggiore, o minore del secondo; come se passasse per li punti A, G, F, E , e non per B , farebbe FDG uguale ad ADE , ed ADG uguale ad FDE , onde farebbe ADB uguale ad ADE , ed FDB uguale ad FDE . Il che è assurdo.

IX. Nel semicerchio AEB qualunque rettangolo BDA de' segmenti del diametro AB diviso in D , farà uguale al quadrato della perpendicolare DE ; perchè congiunto il raggio CE , essendo li due quadrati ED, CD uguali al quadrato CE , o al quadrato CA , o al rettangolo BDA col quadrato CD , tolto esso quadrato CD , resta il quadrato ED uguale al rettangolo BDA . FIG. 93.

X. Onde a qualsivoglia figura rettilinea H può trovarsi il quadrato uguale, potendo farsi un parallelogrammo rettangolo uguale ad essa (a), (a) *Corol. 2.* il quale sia $GBDF$, e prolungato il lato BD in A , Prop. 13. posto DA uguale a DF , sopra il diametro BA fatto un semicircolo, ed eretta la perpendicolare DE , farà il quadrato DE uguale al rettangolo BDA , che è lo stesso di $BDFG$, e però uguale al dato rettilineo H .

XI. Nel medesimo semicircolo AEB congiunte le corde AE, BE , il quadrato AE farà uguale al rettangolo BAD , ed il quadrato BE uguale

le al rettangolo ABD , essendo l'angolo AEB retto, e però li due quadrati AE , BE uguali al quadrato del diametro AB .

FIG. 94. XII. Può dividerfi la retta AB in C , in maniera, che il rettangolo ABC sia uguale al quadrato della parte rimanente AC ; perchè descritto il quadrato $ABID$, e divisa per mezzo AD in E , e congiunta la BE , si prolunghi EA in F , posta EF uguale ad EB , indi descrivasi il quadrato di FA , cioè $AFGC$, farà la AB segata in C nella detta ragione; perchè prolungata GC in H , essendo il rettangolo DFA col quadrato EA , uguale al quadrato EF , cioè al quadrato EB , che è lo stesso co' quadrati di AE , e di AB ; dunque tolto il quadrato AE , rimane il rettangolo DFA , cioè $DFGH$, uguale al quadrato $ABID$, e tolto il rettangolo $ACHD$, farà il quadrato $ACGF$ uguale al rettangolo $IBCH$, che è lo stesso del rettangolo ABC uguale al quadrato AC .

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 95. *La retta AB divisa per mezzo in C , ed altrove in D fuori, o in d al di dentro, faranno li quadrati AD , e DB il doppio del quadrato CD , e del quadrato AC ; ed altresì li due quadrati Ad , e dB sono il doppio del quadrato Cd , e del quadrato AC .*

Imperochè alzata dal punto C la CE uguale a CB , ed alla AB perpendicolare, congiunte le rette AE , BE , e dal punto D sopra la EB condotta DF (o dal punto d la df) parallela ad

ad EC , e tirata FG (ovvero fg) parallela a CB , e congiunta la retta AF (ovvero Af), farà il quadrato EF doppio del quadrato FG (ed Ef doppio del quadrato fg) cioè del quadrato CD (ovvero Cd) essendo nel triangolo rettangolo ECB i lati CE , CB uguali, onde l'angolo CEB è semiretto; ed essendo retto EGF (o Egf), come è retto ECB , farà pure semiretto GFE (o gfe), onde il lato GF è uguale ad EG (ed Eg a gf), però il quadrato EF è doppio di GF , cioè dell'uguale parallela CD (ed il quadrato Ef doppio di gf , cioè dell'uguale Cd). Parimente il quadrato AE è doppio del quadrato AC , essendo AC uguale a CE ; dunque li due quadrati EF , AE sono il doppio de' quadrati CD , ed AC (e li quadrati Ef , Ae il doppio de' quadrati Cd , ed Ac) i quali sono uguali al quadrato AF (ovvero Af) ma questo pure è uguale al quadrato AD , ed al quadrato DF uguale a DB (o al quadrato Ad , ed al quadrato df , uguale a dB) dunque il quadrato AD , col quadrato DB uguaglia il doppio de' quadrati AC , e CD (ed il quadrato Ad col quadrato dB uguaglia il doppio de' quadrati AC , e Cd) dunque è vero il proposto, il quale può esporfi ancora in questo modo, che il quadrato della somma, e della differenza di due rette AC , e CD (o AC , e Cd) delle quali la somma è AD , la differenza BD (o quella Ad , questa Bd) essendo posto CB uguale ad AC , è uguale al doppio quadrato di esse linee date AC , e CD (o AC , e Cd). Il che &c.

Co-

C O R O L L A R J.

FIG. 96. I. Se due linee AB , EF dentro a un cerchio s' interseghino in D ad angolo retto, li quadrati de' segmenti AD , BD , ED , FD faranno il quadruplo del quadrato del raggio CA , e conseguentemente uguali al quadrato del diametro; perchè tirate sopra di esse dal centro le perpendicolari CH , CG , che le dividono pel mezzo, e faranno parallele ad esse rette FE , AB ; essendo il quadrato AD col quadrato DB (quello la somma delle parti AH , HD , e questo la differenza di esse) doppio de' quadrati AH , ed HD ; ed ancora li quadrati ED , DF il doppio de' quadrati EG , GD , congiunti i raggi CA , CE , che hanno i loro quadrati uguali a' quadrati di AH , ed HC (cioè GD) e di EG , e GC (cioè HD), faranno essi quadrati AD , DB , ED , DF dupli de' due quadrati AC , CE (giacchè questi si sono veduti uguali a' quadrati AH , HD , EG , e GD) e però quadrupli del quadrato di un raggio, onde uguagliano il quadrato del diametro.

FIG. 97. II. Lo stesso avviene, se esse linee si congiungano in D fuori del cerchio ad angolo retto, essendo pure ivi li quadrati AD , e DB dupli de' quadrati AH , ed HD , e li quadrati ED , DF dupli de' quadrati EG , GD , e però dupli d' ambedue i quadrati AC , CE , onde essi quadrati AD , DB , ED , DF quadrupli del quadrato d' un raggio.

FIG. 98. III. Quindi ancora si ha, che condotte le rette AF , BE , ed AE , BF , li quadrati delle due pri-

prime sono uguali a' quadrati delle due seconde, ed uguali tanto quelli, che questi al quadrato del diametro, essendo essi uguali alli quadrati AD , DB , ED , DF , presi insieme.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 59.

Il quadrato della somma delle due rette DC , e CA è uguale a quattro rettangoli DCA , col quadrato della differenza di esse linee, cioè di BD , posta CB uguale a CA .

Imperochè fatto il quadrato $ADNQ$ della somma DA e tiratovi il diametro AN , e condotte le CP , BO parallele a' lati, che segheranno il diametro in F , I , d' onde si tirino parallele agli altri lati $EFGH$, $KMIL$, è chiaro, che essendo AC uguale a CB , ed essendo quadrati $ACFE$, $GFMI$, $ABIK$, $LION$, farà il rettangolo $DCFH$ lo stesso che DCA , uguale a $Q EFP$, ed a $PFGO$, ed a $LHFM$, che farebbe lo stesso con $HLIG$, ed $ACFE$ (che è uguale al quadrato $GFMI$, essendo AC uguale a GF) dunque tutto lo spazio $ADLIOQ$ è uguale a quattro rettangoli DCA , che sono $DCFH$, $Q EFP$, $PFGO$, ed $HLIG$ con $ACFE$; però aggiuntovi $LION$, che è il quadrato di ON , cioè di BD , differenza di DC , e CA , ne segue che il quadrato della somma DC , e CB , cioè di CA , che è $ADNQ$, è uguale a quattro rettangoli d' ambidue le rette DC , e CA , col quadrato della loro differenza BD . Il che &c.

Co-

C O R O L L A R J .

I. Quindi il quadrato della differenza BD è uguale al quadrato della somma DA , toltime quattro rettangoli della retta DC nell'altra CA .

II. Onde presi due numeri, per esempio 7, e 2 la cui somma è 9, e la differenza è 5, farà il quadrato di 9 uguale a' 4 prodotti di 7 in 2 col quadrato di 5, cioè farà 81 uguale a 4 via 14, che sono 56, con 25.

III. E viceversa il quadrato della differenza de' medesimi numeri, cioè di 5, che è 25, è uguale al quadrato della somma di 7, e 2, cioè di 9, che è 81, detratto il quadruplo di 7 via 2, cioè detratti 56.

P R O P O S I Z I O N E XXII.

FIG. 100. Da' termini D, C del triangolo ADC condotte a' lati opposti le perpendicolari DE, CB , se gli angoli $D, e C$ sono acuti, il quadrato della base DC sarà uguale a' rettangoli ADB, ACE ; ma se uno degli angoli, per esempio C , è ottuso, il quadrato DC sarà uguale all' eccello del rettangolo ADB sopra l' altro ACE .

FIG. 101. **C**ONvengano esse perpendicolari DE, CB in G , congiunta la AG , conveniente con la base DC in F , ancora questa gli sarà perpendicolare; imperocchè essendo retti gli angoli DBC, DEC , dovrà passare un cerchio per gli quattro punti D, B, C, E ; ed essendo ancora retti gli angoli ABG, AEG , passerà un cerchio per gli quattro punti A, B, E, G ^(*); dunque congiunta BE , l'angolo AEB

(*) Corol. 1.
e 4. della
Prop. 14.

AEB farà uguale a BDC , fecondo il cerchio, che foſſe condotto per li punti D, B, C, E ; ed ancora l'angolo AEB farà uguale ad AGB pel circolo, che paſſa per li punti A, B, E, G ; dunque AGB farà pure uguale all'angolo BDC , o BDF ; onde nella prima figura li due angoli BDF, BGF ſono uguali a due retti; eſſendo uguali ad AGB , e BGF ; e nella ſeconda figura eſſendo uguali BDF, BGF , dovrà paſſare un cerchio per li quattro punti B, D, G, F ; onde eſſendo DBG angolo retto, ancora l'oppoſto DFG nella prima figura farà retto, ed ancora nella ſeconda, eſſendo nel medefimo ſemicircolo tanto DBG , che DFG ; ficchè la AG rieſce in F perpendicolare alla baſe; onde ancora faranno retti gli angoli ABC , ed AFC , onde paſſerà un cerchio per li quattro punti A, B, F, C , ed ancora per li quattro A, D, F, E ; dunque il rettangolo ADB farà uguale ad FDC , ed il rettangolo ACE farà uguale a DCF ; ma nella prima figura li due rettangoli FDC , e DCF ſono uguali al quadrato DC ; dunque ivi il quadrato DC è uguale alli due rettangoli ADB , ed ACE : Nella ſeconda figura poi eſſendo il quadrato DC uguale ad FDC , manco DCF , farà eſſo quadrato uguale al rettangolo ADB , detratte l'altro ACE . Il che dovea dimoſtrarſi.

C O R O L L A R J.

I. Ancora in queſt' altra figura eſſendo l'angolo ottuſo DAC oppoſto alla baſe DC , le perpendicolari DE, CB cadono ſopra i lati prolungati al di fuori, e convengono in G al di ſopra

FIG. 102.

E

pra

dra del vertice A , e congiunta la AG parimente concorre con la base DC in F ad angoli retti; perchè congiunta EB , passando un cerchio per li punti A, E, G, B , e per li punti D, E, B, C , l'angolo CBE è uguale ad EDC , o diciamo EDF , ed ancora GAE è uguale a GBE ; onde GAE , ed EDF essendo uguali, EAF , ed EDF sono uguali a due retti. onde passa un cerchio per li punti D, E, A, F , sicchè essendo retto AED , ancora AFD è retto; ed il quadrato della base DC farà pure uguale a' rettangoli ADB , ed ACE , essendo ADB uguale a CDF , ad ACE uguale a DFC ; onde essendo il quadrato DC uguale agli rettangoli CDF , e DCF , è pure uguale alli rettangoli ADB , ed ACE .

II. Anzi essendo ancora in questa figura, e nella prima, e seconda, il rettangolo CDF uguale al rettangolo GDE , e l'altro DCF uguale a GCB , farà pure ADB con ACE uguale agli altri due GDE , GCB ; ed essendo il quadrato DC uguale alla somma de' rettangoli ADB , ACE , quando gli angoli D, C sono acuti, ma se un angolo C è ottuso essendo il quadrato DC uguale all'ecceffo di ADB sopra ACE , farà ancora nel primo caso il quadrato DC uguale alla somma de' rettangoli GDE , GCB , e nel secondo caso uguale alla loro differenza, cioè all'ecceffo di GDE sopra GCB .

III. E' manifesto poi, che le tre perpendicolari, condotte dagli angoli di qualunque triangolo a' lati opposti, convengono in un medesimo punto G ; e dove convengono due di esse, congiunto l'altro angolo col punto di detto concorso, que-

questa linea pure è perpendicolare all' altro lato opposto.

IV. Quando l' angolo A è retto, ciascun lato è da se stesso perpendicolare all' altro, convenendo nel punto A , ed il quadrato della base DC allora è uguale a' quadrati de' lati, che sono i rettangoli ADA , ACA , essendo tanto il punto E , che il punto B (ed ancora il punto G) nel medesimo punto A . FIG. 103.

V. Essendo l' angolo A acuto, il quadrato DC FIG. 104. uguaglia i quadrati de' lati AD , AC , detratti i due rettangoli DAB , CAE , ovvero detratto il duplo di uno di essi, perchè l' uno all' altro è uguale, o pure detratto il duplo del rettangolo FAG , che uguaglia parimente gli stessi DAB , CAE ; imperocchè li quadrati AD , ed AC sono uguali, quello a' rettangoli ADB , DAB , questo a' rettangoli ACE , CAE ; dunque essendo il quadrato DC uguale agli rettangoli ADB , ACE , farà uguale a' quadrati AD , ed AC , detratti i rettangoli DAB , CAE , che sono il doppio di ciascuno di essi, e di FAG .

VI. Ma se l' angolo DAC è ottuso, il quadrato DC FIG. 105. uguaglierà non solo i quadrati AD , AC , ma di più li rettangoli DAB , CAE , o dicasi il doppio di ciascuno di essi, essendo uguali, o ancora può dirsi il doppio di GAF , che pure è uguale a ciascuno degli altri. Imperocchè essendo esso quadrato uguale a' rettangoli ADB , ed ACE , il primo de' quali importa il quadrato AD col rettangolo DAB , ed il secondo è uguale al quadrato AC col rettangolo CAE , è chiaro, che il quadrato DC eccede li quadrati AD , AC con li detti rettangoli. VII.

FIG. 106.

VII. Nel triangolo Acuziangolo ADC condotte dagli angoli a' lati opposti le perpendicolari DE , CB , AF , che convengono in G , li quadrati de' lati AD , DC , ed AC sono uguali al doppio de' rettangoli EDG , BCG , FAG ; imperocchè si è dimostrato essere il quadrato DC uguale alli rettangoli EDG , BCG ; ed il quadrato AC similmente è uguale a' rettangoli BCG , FAG ; ed il quadrato AD uguale a' rettangoli FAG , EDG ; dunque i quadrati di tutti li tre lati uguagliano il doppio di detti rettangoli, che sono ivi due volte nominati.

VIII. Quindi in effo triangolo due quadrati AD , ed AC uguagliano BCG , EDG , col doppio del rettangolo FAG ; onde effi quadrati AD , AC uguagliano il quadrato DC (che è uguale alli due rettangoli BCG , EDG) col doppio rettangolo FAG .

IX. Onde se riesce AF divisa in G per mezzo, essendo il quadrato AF doppio del rettangolo FAG , faranno li due quadrati AD , AC uguali al quadrato DC col quadrato della perpendicolare AF .

FIG. 107.

X. Però se vi farà un triangolo rettangolo CAH , condotta la perpendicolare AF sopra la base, e divisa la parte HF per mezzo in D , congiunta DA , farà fatto il triangolo DAC tale, che averà li quadrati de' lati AC , AD uguali al quadrato della base DC , e della perpendicolare AF ; imperocchè condotta la DE perpendicolare al lato AC dividerà per mezzo la perpendicolare AF in G , essendo ancora l'angolo HAC retto, e però DGE parallela ad AH ; e
fic-

ficcome nel triangolo HAF la DG divide HF per mezzo in D , così dividerà per mezzo AF in G .

PROPOSIZIONE XXIII.

*In qualunque triangolo ABC condotta la ret- TAV.VII.
ta BD dal vertice B in D alla metà della base FIG. 108
 AC , faranno li quadrati de' lati BA , BC uguali
al doppio del quadrato della retta BD , ed al dop-
pio del quadrato della metà della base AD , ov-
vero DC .*

SE il triangolo è equicrure, la retta BD sa-
rà perpendicolare alla base, onde essendo AB
quadrato uguale a' quadrati AD , BD , ed il qua-
drato BC uguale a' quadrati CD , BD , è mani-
festo, che li due quadrati AB , e BC uguaglia-
no il doppio de' quadrati BD , ed AD .

Ma se non sono que' lati uguali, la BD fe-
gherà obliquamente la base AC , e condottevi
le perpendicolari AF , CE , essendo ne' triangoli
 ADF , CDE gli angoli del primo uguali agli
angoli del secondo, e la CE parallela ad AF ,
ed il lato AD uguale al lato DC , faranno pure
gli altri lati loro uguali, cioè DF uguale a DE ;
però il rettangolo BDE uguaglierà il rettangolo
 BDF ; onde essendo il quadrato AB uguale a'
quadrati AD , BD con due rettangoli BDF ;
ed il quadrato BC uguale a' quadrati CD , e BD ,
detratti due rettangoli BDE , quindi sono li due
quadrati AB , e CB solamente uguali a' due qua-
drati della BD , ed a' due quadrati della mezza

E 3

base

base AD , che sono gli ambidue uguali AD , e CD ; giacchè li due retti angoli BDE uguagliano gli altri due BDF , onde quelli aggiunti, e questi sottratti, nulla di più, nè di meno importano alli due quadrati AB , e BC , se non il doppio quadrato BD , ed il doppio quadrato AD . Il che era da dimostrarfi.

C O R O L L A R J.

FIG. 109. I. Quindi in ogni parallelogrammo $ABCE$ li quadrati de' diametri AC , BE uguagliano i quadrati de' lati AB , BC , CE , ed EA ; imperocchè essendo AB , BC uguali al doppio de' quadrati BD , ed AD , e li quadrati CE , ed EA uguali al doppio de' quadrati ED , ed AD , essendo ED uguale a BD (perchè li diametri si dividono per mezzo in D , essendo i triangoli ADE , BDC con ciascun angolo dell'uno uguale al corrispondente dell'altro, ed il lato AE uguale a BC , e però gli altri lati uguali, BD a DE , ed AD a DC) faranno li quadrati de' lati AB , BC , CE , EA uguali al quadruplo del quadrato BD (che è il quadrato di BE) con il quadruplo del quadrato AD (che è il quadrato AC) dunque li quadrati de' lati uguagliano quelli de' diametri.

FIG. 110. II. Onde se due parallelogrammi $ABCE$, ed $FGIH$ hanno i medesimi lati, ma con diversi angoli composti, li diametri dell'uno essendo disuguali a' diametri dell'altro, faranno però i quadrati de' diametri di quello uguali a' quadrati de' diametri di questo, essendo uguali tanto gli uni, che gli altri a' quadrati de' lati del suo rettangolo, i quali suppongansi rimasi uguali.

III.

III. Similmente, se li diametri AC, BE d'un parallelogrammo sono uguali a' diametri GH, FI di un altro, benchè variamente inclinati tra di se questi, che quelli; faranno pure li quadrati de' lati del primo uguali a' quadrati de' lati del secondo parallelogrammo, benchè ricscano disuguali questi lati a quelli.

FIG. 111

IV. Nel diametro GF d'un cerchio presi due punti A, B (dentro, o fuori del circolo) ugualmente distanti dal centro C , condotte a qualunque punto D della periferia le rette AD, BD , ed a qualsivoglia altro punto E le rette AE, BE , faranno i quadrati di quelle uguali a' quadrati di queste; imperocchè congiunti i raggi CD, CE , tanto sono li quadrati AD , e DB uguali al doppio de' quadrati AC, DC , quanto li quadrati AE, BE sono parimente uguali al doppio de' quadrati AC, EC ; onde sono gli stessi.

FIG. 112.

V. Similmente, se da qualunque punto D , dentro, o fuori del cerchio si conducano a' termini di qualunque diametro GF , ed AB , le rette DG, DF , e DA, DB , li quadrati delle prime faranno uguali a' quadrati delle seconde, perchè condotta al centro la retta DC , tanto li quadrati DG , e DF sono il doppio del quadrato DC , e del quadrato del raggio CG , quanto li quadrati DA , e DB sono pure il doppio del quadrato DC , e del quadrato del raggio CA ; il che è il medesimo di quello.

FIG. 113:

VI. In ogni triangolo ABC condotti da qualunque angolo gli assi AE, BD, CF , che segano per mezzo gli opposti lati BC, AC, AB , faranno li quadrati di questi lati agli quadrati de' sud-

detti assi, come 4 a 3; perchè essendo li quadrati AB , e BC il doppio del quadrato BD , e del quadrato AD ; e li quadrati AB , ed AC il doppio de' quadrati AE , CE ; e li quadrati AC , BC il doppio de' quadrati CF , AF ; dunque li due quadrati AB , e li due AC , e li due BC sono uguali al doppio de' quadrati BD , AE , CF , con li due quarti, cioè la metà de' quadrati AC , BC , AB ; e però (dividendo l'una, e l'altra parte per mezzo) li soli quadrati AB , AC , BC uguagliano li quadrati BD , AE , CF , con un quarto de' quadrati AB , AC , BC ; e tolto di quà, e di là questo quarto, rimangono $\frac{3}{4}$ de' quadrati AB , AC , BC uguali a' quadrati BD , AE , CF ; onde 3 quadrati de' lati sono uguali a 4 quadrati degli assi; e però li quadrati AB , AC , BC a' quadrati BD , AE , CF , sono come 4 a 3.

A V V E R T I M E N T O .

Si proverebbe ancora, essere li quadrati de' lati AB , AC , BC uguali al triplo de' quadrati di AG , BG , e CG , ed al duodecimo de' quadrati GD , GE , GF ; ma ciò potrà ricavarfi dopo aver intese le proprietà delle Proporzioni, di cui parleremo nella seguente seconda parte; ed osservando, ne raccoglieranno li bravi Studenti, che li quadrati delle intere AE , BD , CF sono alli quadrati delle loro due terze parti AG , BG , CG , come 9. a 4. ed a' quadrati delle loro terze parti GE , GD , GF , come 9. ad 1. onde paragonando questi quadrati ordinatamente, o perturbatamente co' quadrati de' lati AB , AC , BC , ne seguirà il proposto.

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

P A R T E S E C O N D A .

D E F I N I Z I O N I .

I. **D**iconsi *Omogenee* quelle grandezze , che moltiplicandosi riescono una maggiore dell'altra .

II. *Proporzione* dicesi la scambievole relazione della quantità di una grandezza con quella d' un'altra omogenea ad essa , che ancora dicesi *Ragione* .

III. *Proporzionalità* dicesi la similitudine delle proporzioni tra varie quantità ; in maniera tale però , che se si attende solamente la differenza tra due grandezze , uguale alla differenza di due altre , dicesi *Proporzionalità aritmetica* ; ma se nel medesimo modo una grandezza contiene un'altra , o in essa si contiene , come qualche altra grandezza contiene , o è contenuta in un'altra , si dice *Proporzionalità Geometrica* ;

S C O L I O I .

I. **N**ella *proporzionalità aritmetica* bisogna , che tutti i termini siano omogenei , acciò abbiano una uguale differenza l' uno dall' altro . Per esempio , sono aritmeticamente proporzionali i numeri

FIG. 114. *ri 7 e 5. 12. e 10. perchè le loro differenze sono 2: ed ancora le linee AB, AC, ed ED, DF sono aritmeticamente proporzionali, quando la differenza BC delle due prime uguagli la differenza FE delle seconde.*

FIG. 115. II. *Ma nella proporzionalità geometrica basta, che siano due termini omogenei, ed altri due termini di materia diversa, solamente omogenei tra loro, non con gli altri due. Per esempio, essendo il triangolo ABC al triangolo BCD, ed ancora la linea E alla linea F, come 3 a 5; diconsi questi termini Geometricamente proporzionali. E lo stesso potrebbero essere due pesi, due velocità, due tempi, due angoli &c. nella stessa proporzione, riferendosi il primo di tali termini al secondo suo omogeneo nella stessa relazione.*

D E F I N I Z I O N I.

IV. **L**E grandezze, che hanno una simile proporzione, cioè la stessa proporzionalità, o sia aritmetica, o geometrica, diconsi quantità *Proporzionali*.

V. Di esse quantità proporzionali si dicono *Antecedenti* la prima, e la terza (e se più fosse, ancora la quinta, e la settima &c.) e diconsi *Conseguenti* la seconda, e la quarta, (e se altre vi sono, ancora la sesta, e l'ottava &c) e diconsi ancora *Omologj* tanto i termini antecedenti tra loro, quanto ancora tra loro i Conseguenti.

VI. L'antecedente poscia col suo conseguente, diconsi termini *Analogi* per la proporzione, che tra loro hanno, che pure chiamasi *Analogia*.

VII.

VII. Se due quantità omologhe ad un' altra sono disuguali, la maggiore presa per antecedente averà *maggior ragione*, che la minore al medesimo conseguente; ma paragonandosi un solo antecedente a due conseguenti disuguali, dirassi maggiore la ragione di esso antecedente al minore, che al maggiore.

S C O L I O II.

I. **S**iccome è chiaro, che essendo li due termini omogenei A, e B disuguali, il primo maggiore, il secondo minore, riesce maggiore la proporzione del primo A al terzo C, che quella del secondo B al medesimo C, così è chiaro, che avendo B ad un altro quarto D la stessa proporzione, che A a C, averà B a D maggior ragione, che B a C; ed è D minore di C, come B è minore di A, per essere proporzionali A, e C, come B a D; dunque lo stesso antecedente ha maggior ragione al minore de' conseguenti, che al maggiore di essi. FIG. 116.

II. Quando sia maggiore la proporzione di A a B, che di C a D, convertendo, cioè pigliati i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti, sarà minore la proporzione di B ad A, che quella di D a C; imperocchè, se avesse E a B la stessa proporzione, che C a D, essendo maggiore la ragione di A a B, che di E a B, farebbe A maggiore di E, dunque averà maggior ragione B ad E, che B ad A; ma B ad E starà, come D a C, dunque è maggiore la ragione di D a C, che di B, ad A. FIG. 117.

DE.

D E F I N I Z I O N I.

VIII. **P**oste quante si vogliano quantità omogenee, la proporzione della prima all'ultima dicesi *composta* delle proporzioni, che averà la prima alla seconda, e la seconda alla terza, e così di altre intermedie fino all'ultima.

IX. Ma essendo uguali le proporzioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta &c. si dirà la proporzione della prima alla terza *duplicata* di quella, che è tra la prima, e la seconda; e la proporzione della prima alla quarta *triplicata* di quella stessa della prima alla seconda; e la proporzione della prima alla quinta si direbbe *quadruplicata* della medesima, che è tra la prima, e la seconda, o tra la seconda, e la terza; e così in infinito.

X. Una retta dicesi *sekata* secondo l'*estrema, e media ragione*, quando tutta ad una sua parte sia come questa parte alla rimanente: Come per esempio, essendo AB ad AC , come AC a CB , dirassi divisa AB secondo l'*estrema, e media* proporzione.

Vedi la
FIG. 114

S C O L I O III.

I. **T**Ra due termini primo, ed ultimo possono interporfi altri omogenei, maggiori, o minori di ciascuno di essi, e così la proporzione di quelli due dicesi *composta* delle proporzioni intermedie; cioè tra le due linee A , e D interposte le linee B , C una maggiore, l'altra minore, si dirà la ragione di A a D composta delle proporzioni A a B , e B a C , e C a D . Così pure tra due

FIG. 118.

numeri 4, 9, presi altri numeri 6, e 3, si dice la proporzione di 4 a 9 composta di queste intermedie di 4 a 6, di 6 a 3, e di 3 a 9; anzi presi quali si voglia altri numeri, 44, 25, 100, tanto si direbbe composta la ragione di 4 a 9, delle ragioni di 4 a 44, di 44 a 25, di 25 a 100, e di 100. a 9; ed essendo pure altre proporzioni disgiunte, tra varj altri generi, per esempio la proporzione delle linee A, B essendo uguale alla proporzione delle superficie EF, e la proporzione di B a C essendo uguale alla ragione degli angoli GH, e la proporzione C, D uguale a quella de' Solidi I, K tanto dirassi, essere la proporzione di A a B composta delle proporzioni di E ad F, e di G ad H, e di I a K, essendo queste uguali all'altre suddette intermedie.

II. Ma essendo uguali le proporzioni tra i termini A, B, C, D omogenei, dirassi quella proporzionalità continua composta di ragioni uguali; e però la prima alla terza, cioè A a C si dirà proporzione duplicata della ragione semplice tra A, e B, ovvero tra B, e C; e la ragione della prima alla quarta si dirà proporzione triplicata di quella, che è semplicemente tra A, e B, ovvero tra B, e C, o pure tra C, e D, per essere la suddetta ragione di A, e C composta di due proporzioni uguali a quella di A a B, e quell'altra di A a D composta di 3 simili proporzioni; e così procedendo ad un altro termine proporzionale, sarà la proporzione del primo al quinto quadrupla di qualunque delle intermedie tra loro uguali: Così posti i numeri 3, 6, 12, 24, 48, la ragione di 3 a 48. si dirà quadrupla di quella

FIG. 119.

la, che è tra 'l primo, e 'l secondo, o tra 'l secondo, e 'l terzo &c. per essere composta di quelle quattro ragioni tra loro uguali: E così degli altri.

III. Siccome una retta può dividersi secondo l'estrema, e media ragione, quando sia tutta ad una parte, come questa stessa alla rimanente, così ancora nelle superficie, ne' corpi, negli angoli, ed in altri termini potrà farsi lo stesso; ma non già in qualche numero potrebbe ciò farsi, perchè quelle parti, in cui divide si una quantità secondo l'estrema, e media ragione, non possono essere commensurabili tra di se, o con l'intera quantità medesima; anzi sono sempre incommensurabili, e però non possono essere parti numerose di qualche numero, ma solamente radici incommensurabili, che devono essere, tanto il numero intero alla sua parte maggiore, quanto questa maggiore alla residua minore in ragione della radice di cinque manco uno, a tre, manco la radice di cinque, come preso il numero 100: converrebbe prenderne la maggior parte uguale a $50\sqrt{5}$, meno 50; e la minore uguale a $50\sqrt{5}$.

IV. Generalmente per esprimere con brevissimo calcolo le grandezze proporzionali, si rappresenteranno con linee, tanto le quantità superficiali, quanto i corpi, o gli angoli, o i pesi, o le forze, o i tempi, o le velocità &c. che si vogliano paragonare; ma più semplicemente si esprimeranno con lettere Alfabetiche, o grandi A, B, C, D &c. o piccole a, b, c, d, &c. delle quali le prime esprimeranno le quantità date, e già note, ma le ultime x, y, z esprimeranno quelle ignote, che
si

si ricercano; e per esprimere la somma di più parti, vi s'interporrà la croce $+$, e per esprimerne la differenza, vi si metterà la lineetta $-$; come per esempio $A + B - C$, espone la somma di A, e di B, detrattono C; e così $b + x + y - c$, importa la somma della data b, e delle ignote x, e y detratta l'altra nota c; e così il segno $+$ significa più, e l'altro $-$ significa meno; sicchè $A - B + E$ spiegasi con dire A manco B più aggiuntovi E &c.

V. La moltiplicazione di una quantità in un'altra si espone congiungendo assieme quelle lettere, che le esprimono; e la divisione si esprime con fare una frazione, in cui una linea separa il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto: Per esempio AB, ovvero cx , espongono il prodotto di A in B, o pure di c in x; e se fossero più lettere unite insieme, ACD, e bax &c. si esprimerà il prodotto di A in C, ed in D, ed ancora il prodotto di e in b, in a, in x; onde il quadrato di una lettera, cioè di A in A si scriverebbe AA, ed il cubo di essa AAA; nel che basterebbe scrivere A^2 in vece di AA, ed A^3 in luogo di AAA; ma volendo dividere ACD per BE, si scriverà $\frac{ACD}{BE}$, e così ancora dividendo A^3 per BC, si scrive $\frac{A^3}{BC}$; e parimente $\frac{ab}{c}$ esprime ab diviso per c, ed $\frac{a^2 b^3}{cx}$ espone la divisione del prodotto fatto dal quadrato a, e dal cubo b per il prodotto di c in x.

VI. L'ugualità poi si esprimerà col segno $=$,
cioè

cioè $AB = CE$, è il prodotto di A in B uguale al prodotto di C in E ; e similmente $ab + ce - bx = cf$ espone, che il prodotto ab col prodotto CE , detrattone il prodotto bx sarà uguale al prodotto cf . L'essere poi una quantità maggiore dell'altra si esprime col segno $>$; e l'essere minore, col segno $<$; come per esempio $A > B$ esprimerebbe essere A maggiore di B , ed $ex < ac$ esporrà essere ex minore di ac .

VII. Il segno della proporzionalità si fa in questa maniera $A \cdot B :: C \cdot D$ cioè la proporzione di A a B è uguale a quella di C a D ; ed ancora in altri esempj, $ax - ab + c^2 \cdot e^2 :: cx - ce \cdot be$, espone, che la proporzione di $ax - ab + c^2$ sta al quadrato di e , come $cx - ce$ al prodotto be : Ma se una proporzione sarà maggiore, o minore dell'altra, si esprimerà con l'altro segno $A \cdot D > C \cdot E$, cioè la proporzione di A a D è maggiore di quella, che ha C ad E ; o pure essendo, $ax + ab \cdot cx < eb - c^2 \cdot x^2$, importerà, che la somma di ax con ab , al prodotto di cx abbia minore proporzione di quella, che ha il prodotto eb , detrattone il quadrato di c , al quadrato di x .

VIII. Potrebbero poscia prendersi per assiomi.

I. Che le quantità uguali, paragonate ad una terza, averanno ad essa ugual proporzione.

II. E viceversa le quantità, che hanno ugual proporzione ad una terza, o alle quali una medesima ha ugual proporzione, esse quantità saranno uguali.

III. Ed ancora se due proporzioni sono uguali ad una terza proporzione, saranno esse pure tra loro uguali.

IV. E

IV. E se una proporzione è maggiore d'un'altra, ed una terza è minore, o uguale a quella seconda, sarà la prima maggiore della terza.

V. Alle uguali proporzioni aggiungendo, o sottraendo altre proporzioni uguali, le composte, o residue riusciranno pure uguali.

PROPOSIZIONE I.

In una aritmetica progressione, che è una continua proporzionalità di termini aritmeticamente crescenti, o decrescenti, con uguale differenza di ciascuno all'altro suo prossimo, il massimo contiene il minimo con tanta molteplicità di esse differenze, quanti sono essi termini susseguenti al massimo.

Siano i termini continuamente disposti con aritmetica proporzionalità, A, B, C, D, E ; essendo A il massimo, ed E il minimo, e la loro continua differenza essendo x , sarà $D = E + x$; e C farà $= D + x$; onde $= E + 2x$; similmente B farà $= C + x$, e però $= E + 3x$; e finalmente $A = B + x$ deve essere $= E + 4x$; dunque il massimo è uguale al minimo con la molteplicità di tante differenze, quanti sono i susseguenti. Così, per esempio, se la progressione aritmetica fosse di questi numeri 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2. la differenza de' quali $= 3$, il massimo 20 $= 2 + 18$, cioè uguale al minimo con il triplo moltiplicato sei volte (essendo sei li termini susseguenti) ed è 3 via 6 $= 18$.

F

Co-

C O R O L L A R J.

I. Similmente il minimo termine può dirsi uguale al massimo, detrattagli tante volte la differenza, quanti sono i termini avanti al minimo: Per esempio $E = A - 4x$, nel primo esempio addotto, e nel secondo farà $2 = 20 - 6$ in 3, cioè $20 - 18$.

II. Anzi qualunque intermedio è uguale al massimo, detratta la differenza tante volte, quanto è il numero de' termini da questo a quello; e lo stesso parimente è uguale al minimo con tante differenze, quanti sono i termini susseguenti ad esso. Così $C = A - 2x = E + 4x$; ed il $14 = 20$, meno 2 ternarj, cioè $20 - 6$, ed ancora $= 2 + 4$ via 3, cioè $= 2 + 12$.

P R O P O S I Z I O N E II.

Se quattro grandezze A, B, C, D sono aritmeticamente proporzionali, la somma dell'estreme A + D è uguale alla somma delle medie B + C.

Imperocchè, essendo la loro differenza $= x$, ed A il termine massimo, D il minimo, farà $C = D + x$; e parimente $A = B + x$; dunque la somma degli estremi $A + D = B + x + D$, e parimente la somma de' medj $B + C = B + D + x$; dunque $A + D = B + C$.

C O R O L L A R J.

I. Se sono tre grandezze aritmeticamente proporzionali A, B, C, la somma dell'estreme farà uguale al doppio della media, cioè $A + C = 2B$

$= 2 B$, essendo in aritmetica proporzionalità $A : B :: B : C$, onde le due medie sono il doppio di B .

II. Nella progressione continua aritmetica di termini proporzionali A, B, C, D, E, F, G , la somma degli estremi $A + G$ sarà uguale alla somma di qualunque due altri ugualmente distanti dagli estremi, cioè $B + F$, ovvero $C + E$; ed essendo il numero di essi dispari, faranno quelle somme ancora uguali al doppio dell' intermedio, cioè $= 2 D$.

III. Vicendevolmente, se di più termini omogenei farà la somma degli estremi uguale ad altre somme di due intermedj, bisognerà, che siano essi termini aritmeticamente proporzionali; cioè, se $A + D = B + C$, bisognerà che sia la medesima differenza di A e B , che di C e D , perchè tolti di quà, e di là D , e B , sarà $A - B = C - D$, e però la loro differenza è uguale.

IV. Così in un semicircolo essendo inscritti i due triangoli rettangoli ACB, ADB , per essere il quadrato AC col quadrato CB uguale a' quadrati AD, BD (perchè tanto li due primi, che li due ultimi sono uguali al quadrato del diametro AB) sarà l' eccesso del quadrato BC sopra il quadrato BD uguale all' eccesso del quadrato AD sopra il quadrato AC . FIG. 120.

PROPOSIZIONE III.

Nella continua progressione aritmetica di quanti termini si vogliano, come A, B, C, D, E, F , ovvero in numeri 12. 10. 8. 6. 4. 2. la somma di tutti è uguale alla metà dell' aggregato degli estremi, o

F 2

di

di altri due ugualmente distanti da essi, moltiplicata nel numero della moltitudine di tutti i termini,

SI rimettano gli stessi termini con ordine inverfo, cioè F, E, D, C, B, A ; e ne' numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, composti co' precedenti; per il Coroll. 2 della precedente Proposizione sarà la somma di due qualunque $A \rightarrow F$, e $B \rightarrow E$, e $C \rightarrow D$ &c. tra loro uguali, siccome pure $12 \rightarrow 2 = 10 \rightarrow 4 = 8 \rightarrow 6$ &c. essendo tutti $= 14$; dunque la somma di tutte queste paia sarà l' aggregato degli estremi, o di due qualunque ugualmente distanti da essi, moltiplicato per il numero di essi termini; dunque il prodotto dell' aggregato degli estremi nella moltitudine de' termini proposti uguaglia tutti essi termini posti due volte; però la metà dell' aggregato di detti estremi, o di due da loro ugualmente distanti moltiplicata pel numero della moltitudine di tali termini uguaglia esattamente la somma di essi termini; come può vedersi ne' numeri addotti $12 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, che sono 6 numeri; ed essendo $12 \rightarrow 2$, ovvero $10 \rightarrow 4 = 14$, la cui metà è 7, moltiplicando il 7 per 6, ne proviene 42, e questa è la somma di tutti essi numeri proposti.

C O R O L L A R J.

I. Se il numero dei termini fosse dispari, come A, B, C, D, E , ovvero 10. 7. 4; essendo

do la somma degli estremi uguale al doppio di quel di mezzo, farà l'aggregato di tutti i termini uguale al prodotto di quel di mezzo nel numero della loro moltitudine; così $10 + 7 + 4 = 7$ moltiplicato in $3 = 21$; e se fossero 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2; il numero di mezzo 11 moltiplicato per 7, che è il numero di tanti termini, farà 77, che è l'aggregato di tutti.

II. Ancora col minimo termine, e con la differenza di essi termini, e col numero della loro moltitudine si può ritrovare l'aggregato di essi: Per esempio sia *il minimo* $= a$, e la differenza $= x$, e il numero della moltitudine di essi termini $= n$, farà l'aggregato di tutti $= na + \frac{n^2 - n}{2} x$, cioè si moltiplichino il minimo termine pel detto numero, che farà na , e si moltiplichino la differenza x pel quadrato di detto numero, detrattono esso numero, e diviso questo prodotto per metà, che è $\frac{n^2 - n}{2} x$; imperocchè essendo a il minimo termine, il massimo farà $= a + \frac{n-1}{1} x$, dunque la somma di questi due estremi $= 2a + \frac{n-1}{1} x$, che moltiplicata per n , e divisa per mezzo, riesce $\frac{2na + \frac{n^2 - n}{1} x}{2} = na + \frac{n^2 - n}{2} x$, come sopra.

III. Se la serie aritmetica comincia dall'unità, e segue con ciascun numero, il loro aggregato farà uguale alla somma del quadrato dell'ultimo termine col medesimo termine, divisa per mezzo. Per esempio siano i termini 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. piglisi il quadrato dell'ultimo, che

F 3

è 49.

è 49, ed aggiuntagli la sua radice 7, che diventa 56. (che farà sempre un numero pari) diviso per mezzo, resta 28; e tale è l' aggregato di tutti que' numeri; Imperocchè essendo il primo numero 1, e l' ultimo uguale al numero della moltitudine di essi, che sia $= n$; la somma di questi estremi moltiplicata pel numero della loro moltitudine, e divisa per mezzo, farà sempre $= \frac{1+n}{2}$ in n diviso per mezzo, il che riesce $\frac{n^2+n}{2}$, e tale però è l' aggregato di essi termini.

IV. Ma se dall' unità si dispongono tutti i numeri dispari, la cui differenza farà sempre 2, il loro aggregato sempre riuscirà un quadrato, la cui radice è la somma degli due estremi divisa per mezzo: Per esempio sia questa serie 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13., è chiaro, che $1 + 3 = 4$, la cui radice è $\frac{3+1}{2} = 2$; ed ancora $1 + 3 + 5 = 9$, la cui radice è $\frac{5+1}{2} = 3$; e similmente $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, la cui radice è $\frac{7+1}{2} = 4$; e così pure aggiuntovi l' altro numero 9, il suo aggregato è 25, la cui radice è $\frac{9+1}{2} = 5$; ed annessovi ancora il numero 11. diventa 36, la cui radice è $\frac{11+1}{2} = 6$; e parimente compreso il 13. la somma di tutti farà 49, la cui radice è $\frac{13+1}{2} = 7$; e così procedendo, sempre si trova il medesimo.

PROPOSIZIONE IV.

I termini aritmeticamente proporzionali, ancora Convertendo, ed alternando rimangono proporzionali.

Dicesi *Convertendo*, quando si pigliano i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti; cioè essendo A a B , come C a D , sarà convertendo B ad A , come D a C , rimanendo in essi l' istessa differenza, se non che gli eccessi riescono difetti, o li difetti riescono eccessi.

Dicesi poi *alternando*, quando si paragona il primo antecedente al secondo antecedente, ed il primo conseguente al secondo conseguente cioè A a C , come B a D ; imperocchè per la Prop. 2 essendo la somma degli estremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$, ancora in questa alternazione riesce lo stesso; però ancora in tale disposizione sono i termini aritmeticamente proporzionali, pel Coroll. 3. della Prop. 2. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARI.

I. Ancora gli ugualmente moltiplici, o submoltiplici de' termini aritmeticamente proporzionali riescono pure con l' aritmetica proporzione: Per esempio preso il numero m , se sono proporzionali A a B , come C a D , faranno parimente proporzionali mA ad mB , come mC ad mD , ed ancora $\frac{A}{m}$ a $\frac{B}{m}$, come $\frac{C}{m}$ a $\frac{D}{m}$; perchè ef-

F 4

sen-

sendo la somma degli estremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$ ancora tutti moltiplicati, o divisi per m , riescono uguali; cioè $m A + m D = m B + m C$; ed $\frac{A}{m} + \frac{D}{m} = \frac{B}{m} + \frac{C}{m}$; e però questi ancora sono aritmeticamente proporzionali.

II. Essendo ancora altri quattro termini E, F, G, H aritmeticamente proporzionali, come gli altri A, B, C, D , o con la stessa differenza, o con altra diversa, aggiunti pure insieme essi termini omologhi, cioè $A + E, B + F, C + G, D + H$ sono aritmeticamente proporzionali; perchè essendo $A + D = B + C$, ed $E + H = F + G$, ancora aggiunti questi a quelli, riescono uguali, cioè $A + D + E + H = B + C + F + G$.

III. Anzi ancora disgiungendo gli omologhi minori da' maggiori, restano aritmeticamente proporzionali; cioè se gli ultimi quattro sono minori de' primi, riusciranno proporzionali $A - E, B - F, C - G, D - H$, perchè ancora $A + D - E - H = B + C - F - G$: Per esempio ne' numeri essendo proporzionali $21 \cdot 18 :: 16 \cdot 13$, e questi altri $8 \cdot 6 :: 5 \cdot 3$ non solo compresi insieme $21 + 8 \cdot 18 + 6 :: 16 + 5 \cdot 13 + 3$, cioè $29 \cdot 24 :: 21 \cdot 16$; ma ancora sottraendo i secondi da' primi, saranno aritmeticamente proporzionali $21 - 8 \cdot 18 - 6 :: 16 - 5 \cdot 13 - 3$, cioè $13 \cdot 12 :: 11 \cdot 10$.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Le quantità A, B, C, D essendo geometricamente proporzionali, il prodotto della moltiplicazione degli estremi è uguale al prodotto della moltiplicazione de' mezzi, cioè $AD = BC$.

IL modo, con cui A contiene B , o è contenuto in esso, si esprima con la lettera m (che esprimerà o il doppio, o il triplo &c. o la metà, o il terzo &c. o la radice di qualche numero) sicchè farà $A = mB$; e così ancora dovrà essere $C = mD$, mentre la loro proporzione geometrica importa, che tanto il primo contenga il secondo, quanto il terzo contiene il quarto, ed ancora quanto è contenuto il primo nel secondo, tanto il terzo si contiene nel quarto; dunque farà $AD = mBD$, ed ancora $BC = BmD$; ma è lo stesso mBD , che BmD (essendo tanto questo, che quello il prodotto di m in B , ed in D); dunque il prodotto degli estremi AD uguaglia il prodotto de' medj BC . Il che &c.

COROLLARI.

I. Vicendevolmente, se il prodotto degli estremi AD è uguale al prodotto de' mezzani BC , faranno geometricamente proporzionali $A : B :: C : D$, perchè in qualunque modo, che il primo A contenga il secondo B , o sia in esso contenuto, farà $A = mB$; dunque $AD = mBD = BC$; onde da questi due ultimi prodotti levato il B , farà ancora $mD = C$; onde C nel medesimo modo contiene D , o in esso è contenuto, come A con-

contiene B , o è contenuto in esso; onde sono geometricamente proporzionali.

II. I termini geometricamente proporzionali ancora *convertendo*, ed anche *alternando* (purchè sian tutti quattro omogenei, altrimenti se fossero i due primi d' un genere, e gli altri due d' un altro, non si potrebbe paragonare il primo antecedente all' altro antecedente eterogeneo, nè il conseguente del primo genere al conseguente dell' altro) riescono pure geometricamente proporzionali; imperocchè essendo $AD = BC$, non solo $A \cdot B :: C \cdot D$, ma ancora faranno convertendo $B \cdot A :: D \cdot C$, ed alternando $A \cdot C :: B \cdot D$, essendo tanto in questa, che in quella disposizione il prodotto degli estremi uguale al prodotto de' mezzani, cioè $AD = BC$.

III. Essendo quattro linee proporzionali $A \cdot B :: C \cdot D$, il rettangolo dell' estreme AD sarà uguale al rettangolo delle medie BC , giacchè $AD = BC$; essendo questi rettangoli il prodotto di un lato nell' altro; e viceversa, se due rettangoli AD, BC sono uguali, starà il lato A del primo al lato B del secondo, come reciprocamente l' altro lato C del secondo al lato D del primo.

IV. Ed essendo tre linee rette continuamente proporzionali $A \cdot B :: B \cdot C$, il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della media, cioè $AC = B^2$; e viceversa essendo un rettangolo uguale ad un quadrato, sono continuamente proporzionali un lato A del rettangolo al lato B del quadrato, ed esso lato B del quadrato all' altro lato C del rettangolo.

V. Quindi nel cerchio essendosi dimostrato il
qua-

quadrato della tangente AH uguale al rettangolo GAI , o all'altro DAB delle seganti, ed il quadrato della FE perpendicolare al diametro uguale al rettangolo DEB delle parti di esso diametro, e due linee LN , IG , ovvero LN , BD , che segansi dentro il circolo, fare uguali i rettangoli delle loro porzioni, cioè $NML = GMI$, ed $LKN = DKB$, è chiaro, che faranno ugualmente proporzionali tanto $GA \cdot AH :: AH \cdot AI$, quanto $DA \cdot AH :: AH \cdot AB$; ed ancora $DA \cdot AG :: AI \cdot AB$, per essere $GAI = DAB$, e tanto questo, che quello $= AH^2$; e parimente proporzionali $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$; ed $LM \cdot MG :: IM \cdot MN$, ed $LK \cdot DK :: BK \cdot KN$ per essere detti rettangoli tra loro uguali, come si ha ne' corollarj della Prop. 19. nella prima Parte, cioè Coroll. 6. 7. 9. ed ancora nell'undecimo, essendo $DF^2 = BDE$, farà $BD \cdot DF :: DF \cdot DE$.

VI. Per quello si è mostrato al Coroll. 12. FIG. 124. dell' istessa Prop. 19. come possa dividersi la retta AB in C , in maniera, che il rettangolo di tutta la AB in una sua parte BC riesca uguale al quadrato della rimanente AC , è manifesto, che così resterà divisa secondo l'estrema, e media ragione, imperocchè essendo $ABC = AC^2$ è l'intera AB alla parte AC , come la stessa alla rimanente porzione CB . Anzi aggiungendo alla AC la uguale AD , farà pure la BD divisa in A , FIG. 125. secondo l'estrema, e media ragione, perchè, siccome $BC \cdot CA :: CA \cdot AB$, farà $BC \cdot CA :: DA \cdot AB$; e componendo $BA \cdot AC$ (cioè $BA \cdot AD$) $:: DB \cdot BA$, però DB , BA , AD riescono proporzionali.

VII.

VII. Volendo alle due rette DE , EF trovare la terza proporzionale, posta EF perpendicolare a DE , e congiunta DF , fatto l'angolo retto DFB , la qual retta FB convenga con DE prolungata in B , farà la EB quella terza proporzionale, che ricercavasi, essendo $DEB = l'E^2$, e però le linee continuamente proporzionali, cioè $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$.

VIII. Ed ancora alle date due rette DE , EB volendo trovare la media proporzionale, poste quelle due insieme congiunte, e sopra il diametro DB fatto il semicircolo BFD , erettavi dal punto E la EF perpendicolare al diametro, farà essa media proporzionale tra le due parti DE , EB ; o pure essendo date le due linee DB , BE , fatto sopra BD il semicircolo, ed eretta la perpendicolare EF , congiunta BF farà la media proporzionale tra le due DB , BE ; ed ancora congiunta DF farà media proporzionale fra DB , e DE , per essere il quadrato $BF^2 = DBE$; e l'altro quadrato $DF^2 = BDE$, siccome ancora $EF^2 = BED$.

PROPOSIZIONE VI.

Essendo le quantità proporzionali $A \cdot B :: C \cdot D$, ancora componendo sono proporzionali $A + B \cdot B :: C + D \cdot D$, ed altresì dividendo riescono proporzionali $A - B \cdot B :: C - D \cdot D$.

Imperochè, essendo uguali i prodotti $AD = BC$, aggiunto di quà, e di là il prodotto BD , faranno $AD + BD = BC + BD$, onde $A + B \cdot B :: C + D \cdot D$, perchè ancora in questi il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' mez-

mezzani; ed ancora levando alli due $AD = BC$ lo stesso BD , faranno pure $AD - BD = BC - BD$; dunque ancora $A - B : B :: C - D : D$; onde tanto componendo, che dividendo i termini rimangono proporzionali.

COROLLARI.

I. Ancora *per conversione di ragione*, cioè paragonando gli antecedenti al loro eccesso sopra i conseguenti sono pure geometricamente proporzionali; imperocchè essendo $AD = BC$, levando questo, e quello dal prodotto AC , ne riesce $AC - AD = AC - BC$; però $A \cdot A - B :: C \cdot C - D$; e se sono questi termini tutti omogenei, farà pure la differenza degli antecedenti alla differenza de' conseguenti, come qualsivoglia antecedente al suo conseguente; cioè $A - C \cdot B - D :: A \cdot B :: C \cdot D$; imperocchè al prodotto AB levando l'uno, e l'altro de' prodotti uguali AD , e BC , ne riuscirà $AB - AD = AB - BC$, e però $A - C \cdot B - D :: A \cdot B$; giacchè il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' mezzani.

II. Similmente rimangono proporzionali, paragonando le somme, o le differenze de' termini omologhi, tanto agli antecedenti, quanto alli conseguenti, o alle loro somme, o alle differenze de' medesimi, come nella Tavola susseguente, in cui le prime 12 proporzioni si verificano ancora in quei casi, ne' quali i due primi termini sono tra loro omogenei, e gli altri due tra di loro, e non co' precedenti; ma tutte poi si adattano generalmente a i 4 termini proporzionali tra di loro tutti omogenei.

TA-

TAVOLA ANALOGICA.

1	$A \cdot B :: C \cdot D$
2	$B \cdot A :: D \cdot C$
3	$A \rightarrow B \cdot B :: C \rightarrow D \cdot D$
4	$B \cdot A \rightarrow B :: D \cdot C \rightarrow D$
5	$A \rightarrow B \cdot A :: C \rightarrow D \cdot C$
6	$A \cdot A \rightarrow B :: C \cdot C \rightarrow D$
7	$A - B \cdot B :: C - D \cdot D$
8	$B \cdot A - B :: D \cdot C - D$
9	$A - B \cdot A :: C - D \cdot C$
10	$A \cdot A - B :: C \cdot C - D$
11	$A \rightarrow B \cdot A - B :: C \rightarrow D \cdot C - D$
12	$A - B \cdot A \rightarrow B :: C - D \cdot C \rightarrow D$
13	$A \rightarrow C \cdot B \rightarrow D :: C \cdot D$
14	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: D \cdot C$
15	$A \rightarrow C \cdot B \rightarrow D :: A \cdot B$
16	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: B \cdot A$
17	$A - C \cdot B - D :: C \cdot D$
18	$B - D \cdot A - C :: D \cdot C$
19	$A - C \cdot B - D :: A \cdot B$
20	$B - D \cdot A - C :: B \cdot A$
21	$A \rightarrow C \cdot B \rightarrow D :: A - C \cdot B - D$
22	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: B - D \cdot A - C$
23	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot D$
24	$C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: D \cdot B \rightarrow D$
25	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot C$
26	$C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: C \cdot A \rightarrow C$

- 27 $A \cdot C :: B \cdot D$
- 28 $C \cdot A :: D \cdot B$
- 29 $A+B \cdot C+D :: B \cdot D$
- 30 $C+D \cdot A+B :: D \cdot B$
- 31 $A+B \cdot C+D :: A \cdot C$
- 32 $C+D \cdot A+B :: C \cdot A$
- 33 $A-B \cdot C-D :: B \cdot D$
- 34 $C-D \cdot A-B :: D \cdot B$
- 35 $A-B \cdot C-D :: A \cdot C$
- 36 $C-D \cdot A-B :: C \cdot A$
- 37 $A+B \cdot C+D :: A-B \cdot C-D$
- 38 $C+D \cdot A+B :: C-D \cdot A-B$
- 39 $A+C \cdot C :: B+D \cdot D$
- 40 $C \cdot A+C :: D \cdot B+D$
- 41 $A+C \cdot A :: B+D \cdot B$
- 42 $A \cdot A+C :: B \cdot B+D$
- 43 $A-C \cdot C :: B-D \cdot D$
- 44 $C \cdot A-C :: D \cdot B-D$
- 45 $A-C \cdot A :: B-D \cdot B$
- 46 $A \cdot A-C :: B \cdot B-D$
- 47 $A+C \cdot A-C :: B+D \cdot B-D$
- 48 $A-C \cdot A+C :: B-D \cdot B+D$
- 49 $A+C+B+D \cdot B+D :: C+D \cdot D$
- 50 $B+D \cdot A+C+B+D :: D \cdot C+D$
- 51 $A+C+B+D \cdot A+C :: C+D \cdot C$
- 52 $A+C \cdot A+C+B+D :: C \cdot C+D$

- 53 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: A \rightarrow C \cdot A$
 54 $A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow C$
 55 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: B \rightarrow D \cdot B$
 56 $A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \cdot B \rightarrow D$
 57 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D$
 58 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D$
 59 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B$
 60 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B$
 61 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot A \rightarrow C$
 62 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot A \rightarrow C$
 63 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D$
 64 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D$
 65 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot C$
 66 $C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \cdot A \rightarrow C$
 67 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: A \rightarrow C \cdot A$
 68 $A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow C$
 69 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: B \rightarrow D \cdot B$
 70 $A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \cdot B \rightarrow D$
 71 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: A \rightarrow B \cdot A$
 72 $A \rightarrow C \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow B$
 73 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: C \rightarrow D \cdot C$
 74 $A \rightarrow C \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: C \cdot C \rightarrow D$
 75 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot D$
 76 $B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: D \cdot C \rightarrow D$
 77 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot B$
 78 $B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: B \cdot A \rightarrow B$
 79 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot D$
 80 $C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: D \cdot D \rightarrow B$
 81 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot D$
 82 $C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: D \cdot B \rightarrow D$
 83 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot C$
 $C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \cdot A \rightarrow C$

85	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: A \rightarrow B \cdot A$	
86	$A \rightarrow C \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow B$	
87	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot B$	
88	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \cdot A \rightarrow B$	
89	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot C \rightarrow D$	
90	$C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$	
91	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow B$	
92	$A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$	
93	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C$	
94	$A \rightarrow C \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$	
95	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D$	
96	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$	
97	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: C \rightarrow D \cdot C$	
98	$A \rightarrow C \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \cdot C \rightarrow D$	
99	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: A \rightarrow B \cdot A$	
100	$A \rightarrow C \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow B$	
101	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: A \rightarrow B \cdot B$	
102	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: B \cdot A \rightarrow B$	
103	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: A \rightarrow C \cdot A$	
104	$A \rightarrow B \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: A \cdot A \rightarrow C$	
105	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: A \rightarrow C \cdot C$	
106	$C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: C \cdot A \rightarrow C$	
107	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot C \rightarrow D :: B \rightarrow D \cdot D$	
108	$C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: D \cdot B \rightarrow D$	
109	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B :: B \rightarrow D \cdot B$	
110	$A \rightarrow B \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: B \cdot B \rightarrow D$	
111	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot D$	
112	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D :: D \cdot C \rightarrow D$	
113	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot B \rightarrow D :: C \rightarrow D \cdot D$	
114	$B \rightarrow D \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: D \cdot C \rightarrow D$	
115	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \cdot A \rightarrow C :: C \rightarrow D \cdot C$	
116	$A \rightarrow C \cdot A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D :: C \cdot C \rightarrow D$	&c.

G

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

Se maggiore è la ragione di A a B , che di C a D , il prodotto dell'estreme AD sarà maggiore del prodotto delle medie BC ; e qualunque volta il prodotto dell'estreme è maggiore del prodotto delle mezzane, sarà maggiore la ragione della prima ad una delle medie, che dell'altra media all'ultima.

IMperocchè, se fosse E a B nella stessa ragione di C a D , farà pure maggior ragione di A a B , che di E a B , onde A farà maggiore di E , per la defin. 7. onde il prodotto di AD sarà pure maggiore di ED , ed essendo $ED = CB$, per essere $E \cdot B :: C \cdot D$, dunque AD è altresì maggiore di CB ; e vicendevolmente, essendo AD maggiore di CB , farà ancora maggiore di ED , onde A riesce maggiore di E , ed è maggior ragione di A a B , che di E a B , cioè che di C a D ; onde essendo il prodotto de' termini estremi maggiore del prodotto de' mezzani, è maggiore la ragione di A a B , che di C a D .

C O R O L L A R J.

I. Ancora *alternando* (se sono i termini omologj) farà maggiore la ragione di A a C , che di B a D , essendo il prodotto AD maggiore del prodotto CB .

II. Ed altresì *componendo*, o *dividendo* i termini analogi, farà maggior ragione di $A \div B$ a B , che di $C \div D$ a D , perchè il prodotto $AD > BC$, aggiunto, o levato di quà, e di là il BD ,
 farà

farà pure $AD \mp BD > BC \mp BD$; e però $A \mp B \cdot B > C \mp D \cdot D$, riuscendo il prodotto degli estremi maggiore del prodotto de' mezzani.

III. Ma *convertendo* è minore la ragione di B ad A , che di D a C , mentre il prodotto delli estremi BC riesce minore del prodotto de' mezzani AD ; ed ancora per *conversione di ragione* è minore quella di A ad $A - B$, che di C a $C - D$, perchè il prodotto $AC - AD$ farà minore di $AC - BC$, levandosi dal prodotto AC il prodotto AD maggiore di BC .

PROPOSIZIONE VIII.

Essendo proporzionali $A \cdot B :: C \cdot D$ ancora gli ugualmente moltiplici degli antecedenti per qualunque numero m , e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti per qualsivoglia numero n , sono pure proporzionali $m A \cdot n B :: m C \cdot n D$; e vicendevolmente, essendo proporzionali gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, saranno ugualmente proporzionali essi antecedenti a' conseguenti semplicemente posti.

PErchè essendo $AD = BC$, moltiplicando l'uno, e l'altro per mn , farà pure $m A n D = n B m C$; dunque $m A \cdot n B :: m C \cdot n D$; ed essendo questi moltiplici proporzionali, siccome farà $m A n D = n B m C$, dividendo l'uno, e l'altro per mn , si averà $AD = BC$, e però $A \cdot B :: C \cdot D$.

C O R O L L A R J.

I. Gli ugualmente moltiplici degli antecedenti essendo proporzionali ad altri ugualmente moltiplici de' conseguenti, è chiaro, che se mA è uguale, o maggiore, o minore di mC , ancora nB è parimente uguale, o maggiore, o minore di nD , altrimenti non farebbero ancora essi proporzionali; e però si accordano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti in uguagliare, o superare, o mancare l'uno dall'altro.

II. Onde quelle quantità solamente possono essere proporzionali, in cui tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti sempre riescono o parimente uguali, o parimente maggiori, o parimente minori, paragonando i moltiplici degli antecedenti a' moltiplici de' conseguenti; perocchè se mai fosse $mA > nB$; ma poi $mC < nD$, farebbe $mA nD > nB nD$, ed $nB nD > nB mC$, e però $mA nD > nB mC$, onde non farebbe $A \cdot B :: C \cdot D$; ma farebbe $A \cdot B > C \cdot D$, perchè essendo $mA nD > nB mC$, detrattone di qua, e di là mn , farebbe $AD > BC$.

P R O P O S I Z I O N E IX.

TAV.VIII.

FIG. 127.

Le grandezze, che crescono ugualmente, secondo che altre grandezze ugualmente crescono, saranno tra di loro proporzionali: Così li triangoli ugualmente alti ACB, ACD sono proporzionali alle loro basi CB, CD; e così ancora li parallelogrammi ACBI, ACDK sono nell' istessa

fa proporzione de' triangoli ugualmente alti, e delle loro basi,

Imperochè, essendo tra le medesime parallele MH , GE tanto i triangoli ugualmente alti ACB , ACD , quanto i parallelogrammi $ACBI$, $ACDK$ sono proporzionali alle basi CB , CD , perchè posta CE doppia di CB , ancora il triangolo ACE riesce doppio di ACB , ed il parallelogrammo $ACEH$ si fa doppio di $ACBI$; e prendendo pure la base CG tripla di CD , tanto il triangolo ACG riesce triplo di ACD , quanto il parallelogrammo $ACGM$ si fa triplo di $ACDK$, per essere sì i triangoli, che i parallelogrammi tra le parallele uguali con le basi uguali, onde ugualmente crescono, crescendo le basi, tanto i triangoli, che i parallelogrammi, e secondo che fosse la $CE = CG$, sarebbe tanto il triangolo $ACE = ACG$, quanto il parallelogrammo $ACEH = ACGM$; e se fosse $CE > CG$, sarebbe pure $ACE > ACG$, ed $ACEH > ACGM$; se fosse $CE < CG$, sarebbe pure $ACE < ACG$, ed $ACEH < ACGM$; e però secondo il Coroll. 2. della precedente proposizione, bisogna che siano proporzionali $CB \cdot CD :: ACB \cdot ACD :: ACBI \cdot ACDK$.

COROLLARI.

I. Nel cerchio gli angoli CAB , CAD fatti FIG. 118. al centro, o quelli fatti alla circonferenza CHB , CHD , ed ancora li settori BCA , CDA sono proporzionali agli archi BC , CD , sopra di cui sono fatti; imperocchè moltiplicando l' arco

CB

CB

CB nell'arco CE , e l'arco DC nell'altro CG , si moltiplicheranno ugualmente gli angoli al centro, e alla circonferenza, e li settori medesimi, essendo $CE \cdot CB :: CAE \cdot CAB :: CHE \cdot CHB :: ECA \cdot BCA$, moltiplicandosi ancora essi angoli, ed essi settori, come è moltiplicato l'arco, sopra di cui sono posti: e così ancora $CG \cdot CD :: CAG \cdot CAD :: CHG \cdot CHD :: CGA \cdot CDA$, e se fosse $CE = CG$ farebbero ancora quei moltiplici angoli, ed i moltiplici settori uguali, e secondo che fosse CE maggiore, o minore di CG , farebbero pure gli angoli fatti al centro, o alla circonferenza sopra CE parimente maggiori, o minori di quelli fatti sopra CG , ed il settore ECA farebbe pure maggiore, o minore dell'altro CGA ; dunque gli angoli, e li settori fatti sopra gli archi CB, CD sono proporzionali a' detti archi, essendo i moltiplici degli antecedenti, ed i moltiplici de' conseguenti talmente disposti, che si accordano in uguagliarsi, o superarsi, o diminuirsi l'uno dall'altro suo omogeneo.

II. Generalmente gli spazj, fatti con uguale velocità in varj tempi, sono proporzionali a' detti tempi, perchè moltiplicatosi il tempo, ugualmente si moltiplicano gli spazj, e secondo che il moltiplice del tempo, di cui fu fatto uno spazio, è uguale, maggiore, o minore del moltiplice del tempo, in cui fu fatto un altro spazio, ancora lo spazio moltiplice del primo è uguale, maggiore, o minore dello spazio moltiplice del secondo: Per esempio, in un ora si facciano 3. miglia di spazio; e con la stessa velocità in 3.

ore

ore si faranno 9. miglia; ed in 20. minuti facendosi un miglio, in cento minuti si faranno cinque miglia; siccome 3 ore sono maggiori di 100. minuti, essendo quelle 180. minuti; così le 9. miglia, fatte in 3. ore, sono maggiori delle 5. miglia fatte in 100. minuti; e se detti tempi fossero uguali, farebbero pure gli spazj uguali, e quando un tempo è minore dell' altro, lo spazjo del primo è pure minore dello spazjo secondo; però sono proporzionali i tempi agli spazj; cioè come un ora a 20. minuti (che è tripla quella di questo) così 3 miglia ad un miglio &c.

PROPOSIZIONE X.

Essendo molti antecedenti A, C, E, G proporzionali ad altrettanti conseguenti B, D, F, H, componendo sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Imperocchè, presi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti col numero m , ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti col numero n , converranno quelli con questi o nell' ugualità, o nell' eccesso, o nel difetto; cioè se $m A = n B$, ancora $m C$ sarà $= n D$, siccome pure $m E = n F$, ed $m G = n H$; onde tutti gli antecedenti $m A + m C + m E + m G$ saranno uguali a tutti i conseguenti $n B + n D + n F + n H$; e se fosse $m A$ maggiore, o minore di $n B$, farebbero pu-

$$\begin{array}{l} A : B :: \\ C : D :: \\ E : F :: \\ G : H \\ \hline m A : n B :: \\ m C : n D :: \\ m E : n F :: \\ m G : n H \end{array}$$

G +

re

re $m A \rightarrow m C \rightarrow m E \rightarrow m G$, maggiori, o minori di $n B \rightarrow n D \rightarrow n F \rightarrow n H$, essendo quelli moltiplici degli antecedenti $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G$, come $m A$ è moltiplice di A , e questi altri ancora moltiplici de' conseguenti $B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H$, come $n B$ è moltiplice di B ; però deve essere la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente, cioè $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \cdot B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H :: A \cdot B$; il che dovevasi dimostrare.

C O R O L L A R J.

I. Essendo una progressione continuamente pro-

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \cdot & B & \cdot & C & \cdot & D & \cdot & E & \cdot & F \\ 1. & & 3. & & 9. & & 27. & & 81. & & 243. \end{array}$$

porzionale A, B, C, D, E, F , sarà parimente come il primo termine A al secondo B , così la somma di tutti i termini senza l'ultimo (che faranno tutti gli antecedenti) alla somma di tutti senza il primo (che sono tutti gli conseguenti) cioè $A \cdot B :: A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \cdot B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ cioè $1. 3. :: 121 \cdot 363$.

II. La somma di tutti i termini continuamente proporzionali è uguale alla differenza del prodotto del secondo nell'ultimo, dal quadrato del primo, divisa per la differenza de' primi due termini; imperocchè la somma di tutti i termini si chiami $= S$; perchè dunque sarà $A \cdot B :: S - F \cdot S - A$, il prodotto degli estremi essendo uguale al prodotto de' medj, avremo

$A S$

$AS - AA = BS - BF$; e se A è maggiore di B , si trasportino essi termini in questa disposizione $AS - BS = AA - BF$; e però dividendo per $A - B$, si averà $S = \frac{AA - BF}{A - B}$;

Se poi A fosse minore di B , si trasportino i termini in quest' altra maniera $BS - AS = BF - AA$, e dividendo per $B - A$, farà la somma $S = \frac{BF - AA}{B - A}$, cioè sempre uguale alla

differenza del prodotto BF , e del quadrato AA , divisa per la differenza de' due termini A , e B .

III. Se la serie decresce in infinito dal primo termine maggiore di tutti, farà l' ultimo $= 0$; e però $S = \frac{AA}{A - B}$, non dovendo aggiungervi il

$- BF$, che è $= 0$, supponendosi l'ultimo F esser nulla; onde tali serie proporzionali, continue in infinito a minori, e minori termini fino allo zero sono uguali al quadrato del primo termine, diviso con la differenza del primo dal secondo: Per esempio $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ &c.

in infinito $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ ed è $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, per cui

divisa l' unità $= 2$ dunque essa continua serie $= 2$, e levatane la prima unità, le frazioni $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1$ e la serie delle frazioni $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. $= \frac{1}{2}$, essendo il quadrato del primo termine $= \frac{1}{9}$ (che è il secondo termine) e la differenza di $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ per cui diviso $\frac{1}{9}$ riesce $\frac{1}{2}$. Similmente la serie $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. $= \frac{1}{3}$ perchè il quadrato del primo termine è il secondo $\frac{1}{16}$ che diviso per $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$, cioè per $\frac{3}{16}$, diventa $= \frac{1}{3}$;

$= \frac{1}{3}$; e così le altre serie proporzionali, che cominciano dopo l' unità con una frazione sono uguali al medesimo modo; cioè se il denominatore è il numero n , deve levarsi l' unità, e allora la prima frazione con tale denominatore è uguale a tutta la serie continua: Per esempio se la serie fosse $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5}$ &c. farà

$$= \frac{1}{n-1}; \text{ e così } \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{1}{9}, \text{ ed ancora } \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} \text{ \&c.}$$

farebbe $= \frac{2}{9}$ essendo il doppio dell' antecedente; onde può dirsi generalmente, che la serie continuamente proporzionale in infinito prodotta, come $\frac{m}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{m}{n^3} + \frac{m}{n^4} + \frac{m}{n^5}$ &c. $= \frac{m}{n-1}$

IV. Quindi può sciogliersi il Sofisma di Zenone, col quale pretendeva dimostrare, che Achille non potesse mai arrivare col suo moto la Testuggine, perchè nel tempo, in cui quello faceva un miglio, questa ne faceva la decima parte, e compita da quello l' istessa decima parte, questa si avanzava per una parte centesima, e quello giungendo al termine di essa centesima parte, questa farebbe avanti la parte millesima &c. Nel che può osservarsi, che quella serie di parti

di miglio $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$, sono $= \frac{1}{9}$ di miglio, al quale arrivando la Testuggine, vi farebbe pure giunto Achille, e l' avrebbe arrivata, perchè avendo esso una velocità dieci volte maggiore di quella della Testuggine, poteva fare

fare dieci parti none del miglio nel tempo, che ne faceva questa una nona parte; onde essendo lontano da essa un miglio, nel tempo medesimo potè arrivarla, avendo fatto un miglio ed $\frac{1}{9}$, cioè $\frac{10}{9}$ parti del miglio, quando quella ne fece una sola nona parte.

PROPOSIZIONE XI.

Essendo quante si vogliano grandezze omogenee A, B, C, D da una parte, ed altre, o dello stesso, o di genere diverso E, F, G, H, omogenee tra loro; e siano ordinatamente proporzionali A . B

A	3	E	9	15
B	5	F	15	24
C	8	G	24	30
D	10	H	30	50

:: E . F; ed ancora B . C :: F . G, ed altresì C . D :: G . H; ovvero perturbatamente, fosse A . B :: G . H, ma B . C :: E . F, e C . D :: F . G; tanto in questo modo promiscuo, quanto nel primo esattamente disposto, sarà la prima A all' ultima D, come la prima E all' ultima H.

Imperochè la ragione di A a D, per la definizione 8. si compone delle ragioni A . B, di B . C, e di C . D; e parimente la ragione di E ad H è composta di E . F, di F . G, e di G . H; dunque essendo tutte le ragioni della prima serie uguali ad altrettante della serie seconda, o con ordine continuo, o con ordine perturbato, deve essere uguale la ragione di A . D all' altra di E . H. Il che dovea dimostrarsi.

Co-

C O R O L L A R J.

I. Se fosse $A \cdot B :: C \cdot D$, e poscia un altro termine E allo stesso B , come un altro F al medesimo D , farà pure $A \rightarrow E \cdot B :: C \rightarrow F \cdot D$, perchè convertendo, $B \cdot E :: D \cdot F$, dunque per questa proposizione, $A \cdot E :: C \cdot F$, e componendo $A \rightarrow E \cdot E :: C \rightarrow F \cdot F$; ed è $E \cdot B :: F \cdot D$, dunque $A \rightarrow E \cdot B :: C \rightarrow F \cdot D$.

FIG. 129. II. I triangoli, o i parallelogrammi ABC , EBD , che hanno un angolo B uguale, faranno tra di loro in ragione composta de' lati, che sono intorno quell'angolo, cioè di AB a BD , e di CB a BE ; imperocchè posto il lato BD in direzione del lato BA , onde per l'uguaglià dell'angolo riuscirà ancora il lato EB nella direzione del lato BC , congiunta la retta CD ne' triangoli, o prolungate ne' parallelogrammi le rette GD , FC , che concorrano in H , onde riuscirà di mezzo il triangolo CBD , ed il parallelogrammo $CBDH$, farà il triangolo ABC al triangolo CBD , o pure ancora il parallelogrammo BF al parallelogrammo RH in ragione delle basi AB a BD , essendo ugualmente alti essi triangoli, e parallelogrammi; ma il triangolo CBD al triangolo EBD , ed ancora il parallelogrammo BH al parallelogrammo BG , che sono pure ugualmente alti, sono in ragione delle basi loro, CB a BE ; dunque perchè il triangolo ABC al triangolo EBD è in ragione composta di ABC a CBD , e di CBD ad EBD , farà pure ABC ad EBD in ragione composta di AB a BD , e di CB a BE ; e lo stesso riesce ne' parallelogrammi $ABCF$, $EBDG$, la cui

cui ragione è composta di BF a BH , e di BH a BG , e però è composta della ragione de' lati AB a BD , e CB a BE , che sono intorno al loro angolo uguale B , come dovea dimostrarfi.

III. Se i lati de' triangoli, o de' parallelogrammi intorno all'angolo uguale sono reciprocamente proporzionali, cioè $AB \cdot BD :: EB \cdot BC$, essi triangoli, o parallelogrammi faranno tra di loro uguali, perchè similmente il triangolo, o parallelogrammo ABC al mezzano CBD , farà come EBD allo stesso CBD , essendo come le loro basi reciprocamente proporzionali, e però $ABC = EBD$.

PROPOSIZIONE XII.

Se la ragione di due quantità, come A a B , $A \cdot 90$ | $C \cdot 3$ | $D \cdot 7$ sia composta delle ragioni $B \cdot 91$ | $E \cdot 15$ | $F \cdot 2$ di C a D , di E ad F , | $G \cdot 4$ | $H \cdot 13$ e di G ad H , sarà essa ragione uguale a quella del prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti, cioè $A \cdot B :: CEG \cdot DFH$.

Imperochè ancora tali prodotti CEG , DFH sono in ragione composta di C a D , di E ad F , e di G ad H , potendosi paragonare CEG a DEG , DEG a DFG , e DFG a DFH , de' quali essendo il primo al secondo come C a D , il secondo al terzo come E ad F , ed il terzo al quarto come G ad H , farà di queste stesse ragioni composta la ragione di CEG a DFH , per la def. 8. e però essendo A a B parimente in ragione com-

po-

posta di C a D , di E ad F , e di G ad H , necessariamente $A \cdot B :: CEG \cdot DFH$. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Quindi l' istessa ragione può dirsi ancora composta delle ragioni promiscue di essi antecedenti paragonati ad altri conseguenti diversamente disposti, come chi dicesse, essere la ragione di A a B ancora composta di C ad H , di G ad F , e di E a D , perchè comunque siano disposti i medesimi antecedenti, ed i conseguenti, fanno gli stessi prodotti CEG , e DFH , la ragione de' quali è l' istessa, che di A a B .

II. Di quelle ragioni componenti qualunque antecedente, paragonato ad uno de' conseguenti, sarà in ragione composta e della ragione proposta direttamente, e dell' altre componenti ragioni, prese inversamente; cioè C a D sarà in ragione composta di A a B , e di F ad E , e di H a G ; o pure paragonando E ad H , avrà ragione composta di A a B , di D a C , e di F a G ; imperocchè essendo $A \cdot B :: CEG \cdot DFH$, moltiplicando tra se gli estremi, e tra se i medj, deve essere $ADFH = BCEG$; dunque $C \cdot D :: AFH \cdot BEG$, e però in ragione composta di A a B , di F ad E , e di H a G ; e paragonando $E \cdot H :: ADF \cdot BCG$, onde E ad H ha ragione composta di A a B , di D a C , e di F a G ; come ne' numeri qui aggiunti si può ritrovare lo stesso.

P R O P O S I Z I O N E XIII.

FIG. 130. *Nel triangolo ABC tirata qualunque retta DE parallela alla base AC, faranno i lati AB, CB*

CB divisi proporzionalmente, cioè $AD \cdot DB :: CE \cdot EB$, ed $AB \cdot BD :: CB \cdot BE$; vicendevolmente, se i lati AB, CB sono segati da una linea DE in parti proporzionali, sarà la DE parallela alla base AC .

Imperocchè congiunte le rette AE, CD , farà il triangolo ADE uguale all' altro CDE , che sulla medesima base DE sono tra le medesime parallele (per la Prop. 12. della prima parte) dunque averà la stessa ragione ADE a DBE , che CDE al medesimo DBE , ma sono $ADE \cdot DBE :: AD \cdot DB$, ed ancora $CDE \cdot DBE :: CE \cdot EB$; dunque sono proporzionali $AD \cdot DB :: CE \cdot EB$, e componendo $AB \cdot BD :: CB \cdot BE$; E similmente essendo $AD \cdot DB :: CE \cdot EB$, faranno i triangoli $ADE \cdot DBE :: CDE \cdot DBE$; dunque $ADE = CDE$, e però sono le AC, DE parallele; il che &c.

C O R O L L A R J .

I. Condotta la DF parallela a BC , farà similmente $AF \cdot FC :: AD \cdot DB$; e componendo $AC \cdot CF :: AB \cdot BD$; ma farà $FC = DE$, dunque $AC \cdot DE :: AB \cdot BD :: CB \cdot BE$; dunque la base del triangolo alla retta, condottagli parallela tra i lati, sta come uno de' lati alla porzione di esso, tra 'l vertice, e detta linea parallela alla base.

II. E se fossero tirate più rette BF, BG dal vertice alla base, segate dalla DE parallela alla base ne' punti H, I , faranno tutte divise proporzionalmente in H, I , come i lati in D, E ; e li segmenti DH, HI, IE saranno pure proporzionali alle parti della base AF, FG, GC ; essendo

AF

$AF \cdot DH :: FB \cdot BH :: FG \cdot HI :: GB \cdot BI$
 $:: GC \cdot IE$; onde ancora permutando $DH \cdot HI$
 $:: AF \cdot FG$, ed $HI \cdot IE :: FG \cdot GC$.

FIG. 131.

III. E se volesse dividerfi una retta BC nell' istessa proporzione, in cui fosse divisa un'altra BA ne' punti D, F ; congiunta la retta AC , e tirategli parallele le rette DE, FG , farà essa BC divisa nella stessa proporzione, in cui è divisa quella.

FIG. 132.

IV. Volendo alle due linee BD, DA trovare la terza proporzionale, aggiunta in qualche angolo alla retta BDA la BE uguale a DA , congiunta DE , e tiratagli parallela la AC , che convenga con BE prolungata in C , farà la EC la terza proporzionale, essendo $BD \cdot DA :: BE \cdot EC$, e la $BE = DA$; e se fossero tre linee diverse BD, DA, BE , fatto il medesimo come sopra, riuscirebbe EC quarta proporzionale alle tre date.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 134.

Se li triangoli ABC, FGH sono equiangoli, essendo l'angolo A uguale all'angolo F , ed il B al G , ed il C all' H , averanno i lati proporzionali, e si dimanderanno Triangoli simili.

SI ponga intorno l'angolo $A = F$ la parte AD del lato $AB = FG$, e la parte AE del lato $AC = FH$; congiunta DE farà uguale ancor essa a GH , e l'angolo $ADE = FGH$, il quale si suppone $= ABC$; dunque DE riesce parallela a BC ; e però $AB \cdot AD :: BC \cdot DE :: CA \cdot AE$; dunque essendo i lati del triangolo ADE uguali a quelli del dato triangolo FGH , sono proporzionali i lati $AB \cdot FG :: BC \cdot GH :: CA \cdot FH$, e permutando,
 AB

$AB \cdot AC :: GF \cdot FH$; ed $AC \cdot CB :: FH \cdot HG$; perciò diconfi triangoli simili.

COROLLARI.

I. Essendo intorno agli angoli uguali A, F li due lati BA , ed AC proporzionali alli due GF, FH , ancora gli altri angoli saranno uguali, e l'altro lato BC al primo BA , ed al secondo CA farà nella stessa proporzione che GH ad FG , e ad FH , cioè essi triangoli saranno simili; imperocchè fatta $AD = FG$, ed $AE = FH$, congiunta DE , farà parallela a BC , essendo pure $BA \cdot AC :: AD \cdot AE$, e permutando $AB \cdot AD :: CA \cdot AE$; onde gli angoli ADE , ed AED , che sono gli stessi degli altri FGH, FHG , saranno uguali agli angoli ABC, ACB .

II. Essendo tutti i lati del triangolo ABC proporzionali a' lati del triangolo FGH , cioè $BA \cdot GF :: CA \cdot HF :: BC \cdot GH$, essi triangoli pure saranno equiangoli, e però simili; perchè poste $AD = GF$, ed $AE = FH$, farà pure $BA \cdot AD :: CA \cdot AE$, e congiunta DE , farà parallela a BC , onde $BC \cdot DE :: CA \cdot AE$, cioè $:: CA \cdot FH$, e però $:: BC \cdot GH$; onde ancora $DE = GH$, e però ADE farà equiangolo ad FGH , onde ancora ABC farà equiangolo ad FGH .

III. Nel triangolo rettangolo ABC condotta dall'angolo retto sopra la base AC la perpendicolare BD , faranno i triangoli ABD, CDB simili tra di se, ed ancora simili al triangolo intero ABC , essendo tutti tre equiangoli; e la perpendicolare BD è media proporzionale fra le due porzioni AD, DC , essendo $AD \cdot DC$

H
 $:: BD$

FIG. 135.

$:: BD \cdot DC$; ed i lati AB , e BC sono medj
 proporzionali tra la base AC , e le parti corri-
 spondenti AD , DC ; essendo $AC \cdot AB :: AB$
 $\cdot AD$; ed $AC \cdot CB :: CB \cdot CD$.

PROPOSIZIONE XV.

*I poligoni ABCDE, FGHJK del medesimo
 FIG. 136. numero di lati, avendo l' uno gli angoli uguali
 agli angoli corrispondenti dell' altro, compresi da'
 lati proporzionali, si possono dividere in triangoli
 simili, e tutta la figura dell' uno dicefi simile a
 quella dell' altro.*

Essendo l'angolo B uguale all'angolo G , con-
 dotte le rette AC , FH , faranno i triangoli
 ABC , FGH simili, per essere intorno agli angoli
 B , e G uguali i lati proporzionali $AB \cdot BC$
 $:: FG \cdot GH$; e così ancora il triangolo AED
 farà simile al triangolo FKI , ed ancora CAD
 simile ad HFI , perchè essendo l'angolo BAE
 $= GFK$, e l'angolo $BAC = GFH$, e l'altro
 $DAE = IFK$, il rimanente $CAD = FHI$,
 e proporzionali $CA \cdot AD :: HF \cdot FI$; dunque
 tutti i triangoli, inscritti nell' uno, sono simili a'
 triangoli inscritti nell' altro, onde la figura $ABCDE$
 riesce simile all' altra $FGHIK$.

C O R O L L A R J.

I. Tutto il perimetro di un poligono a tutto il
 perimetro dell' altro simile è proporzionalmente
 come il lato dell' uno al lato corrispondente del-
 l' altro, perchè essendo qualsivoglia lato del pri-
 mo Poligono proporzionale al lato corrisponden-
 te

te del secondo Poligono, faranno pure tutti i lati del primo, che sono il suo perimetro, a tutti i lati del secondo, che compongono il perimetro di questo, nell' istessa ragione, in cui un lato del primo è al lato corrispondente del secondo.

II. Ne' due cerchj concentrici condotte per lo centro *N* quante si vogliano rette, seganti amendue le periferie, *NGA*, *NHB*, *NIC* &c. e tirate le corde agli archi segati. cioè *AB*, e *GH*; *BC*, ed *HI*; *CD*, ed *IK* &c. riusciranno simili i poligoni *ABCDE*, e *GHIKL*, e tutti li triangoli congiunti al centro col medesimo angolo faranno simili, *ANB* a *GNH*, e *BNC* ad *HNI* &c. e li perimetri di tali poligoni, siccome sono proporzionali a' lati corrispondenti, *BA*, ed *HG*, così ancora sono come i raggi de' cerchj, cui sono inscritti, essendo per la similitudine de' triangoli $BA : HG :: AN : GN$. FIG. 137

III. Che però potendosi accrescere il numero, e diminuire la grandezza de' lati de' poligoni all' infinito, dovrà finalmente tal proprietà de' poligoni simili iscritti ne' cerchj verificarsi ancora delle circonferenze dei medesimi cerchj, che sono l' ultimo termine, nel quale vanno a finire i perimetri de' poligoni simili, moltiplicato che sia in infinito il numero de' lati, e in questa maniera le circonferenze de' cerchj si dimostrano proporzionali a i raggi loro, e a' diametri.

PROPOSIZIONE XVI.

I triangoli simili ABC, FGH sono in duplicata ragione de' loro lati omologj, AC, GH.

FIG. 138. **S**I faccia, come $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, che farà la terza proporzionale, e si congiunga BI . Sarà il triangolo $BCI = FHG$ pel Coroll. 3. della Prop. XI. essendo gli angoli C , ed H uguali, ed i loro lati reciprochi, perchè essendo $BC \cdot FH :: AC \cdot GI$, ed $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, sono $BC \cdot FH :: HG \cdot CI$; dunque il triangolo ABC all' altro simile GFH è come ABC a BCI , cioè come la base AC alla base CI ; ed è AC a CI in duplicata ragione di AC a GH , per la defin. 9. dunque i triangoli simili ABC, GFH sono in duplicata ragione de' lati omologj AC , e GH . Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 139. **I.** Quindi ancora tutti i Poligoni simili $ABCDE, FGHJK$ dividendosi, per la prop. 15. in altrettanti simili triangoli, sono pure in duplicata ragione de' loro lati omologj, come sono tali triangoli; perchè essendo ABC ad FGH in duplicata ragione di BC a GH ; e CAD ad HFI in ragione duplicata di CD ad HI (che è la medesima di BC a GH) ed ancora DAE ad IFK in ragione duplicata de' lati DE ad IK (che sono pure come CD ad HI), sono però tutti i triangoli del Poligono $ABCDE$ a tutti quelli dell' altro simile poligono $FGHIK$ in duplicata ragione de' lati omologj.

II. Ed

II. Ed essendo ancora i quadrati di qualsivoglia lato simili tra loro, sono pure in duplicata ragione di essi lati; onde i triangoli simili, ed i poligoni simili, ed ancora i cerchj essendo in duplicata ragione de' loro lati, o de' loro perimetri, o de' diametri, sono ancora in duplicata ragione de' quadrati fatti da' lati, o diametri de' Poligoni, o da' raggi de' circoli, o dalle loro circonferenze.

TAV. IX.
FIG. 140.

III. Essendo in ogni triangolo rettangolo BAC il quadrato della base BC uguale alli quadrati de' lati AB , AC (Coroll. I. Proposiz. 18. nella parte I.) ne segue, che ancora qualsivoglia figura $BHIC$, fatta sopra essa base BC , sarà uguale alle simili figure $BDEA$, $CGFA$, fatte sopra i lati AB , AC contenenti l'angolo retto, essendo tali figure simili, come i loro quadrati, o siano poligoni rettilinei, o circoli, o semicircoli, o settori simili di tali cerchj.

IV. Sopra la retta BC fatto un semicircolo, FIG. 141. ed a qualunque punto A congiunte le rette BA , CA , e sopra di esse fatti li semicircoli BDA , CFA , essendo l'angolo BAC retto, sarà il semicircolo $BHAIC$ uguale alli due semicircoli BDA , CFA ; e toltine gli spazj comuni BHA , CIA , saranno le due lunule $ADBHA$, $AFCIA$ uguali al rimanente triangolo BAC ; e se il punto A fosse nel mezzo della semicirconferenza, detti semicircoli sarebbero uguali, avendo pure le rette BA , ed AC uguali, e li segmenti BHA , CIA sarebbero uguali, onde ancora le lunule essendo uguali, sarebbe ciascheduna uguale alla metà del triangolo BAC .

H 3

PRO-

PROPOSIZIONE XVII.

Nel triangolo ABC condotta dal vertice A la retta AD sopra la base BC, o al di dentro, o al di fuori di esso triangolo, sarà BD a DC in ragione composta de' lati AB, ed AC, e del seno dell' angolo BAD al seno dell' angolo CAD, li quali seni sono le perpendicolari, condotte da qualunque punto di essa retta AD sopra i lati AB, AC.

FIG. 142. **I**mperochè dal punto D tirate esse perpendicolari DE, DF sopra i lati del triangolo, è manifesto, essere BD a DC, come il triangolo BAD al triangolo DAC, che hanno la medesima altezza; dunque sono in ragione composta delle AB, ed AC, che sono loro basi, e dell' altezze DE, DF di tali triangoli; ma tali perpendicolari DE, DF sono i seni particolari degli angoli BAD, CAD, essendo AD il seno totale opposto all' angolo retto, che farebbe un raggio del cerchio descritto per lo centro A; dunque BD a DC è in ragione composta de' lati AB, AC, e de' seni degli angoli BAD, CAD; Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIJ.

I. Se la retta AD divide pel mezzo l'angolo interno BAC, o l' esterno CAE, i loro seni DE, DF saranno uguali; però BD a DC farà solamente, come il lato AB al lato AC.

II. E se i lati AB, AC fossero uguali, farebbe BD a DC solamente, come il seno dell' angolo BAD al seno dell' angolo DAC.

III. Quindi vicendevolmente, se fosse BD a DC , come il lato AB al lato AC , la retta AD dividerebbe pel mezzo l'angolo interno BAC , o l'esterno CAE , e se fossero $BD \cdot DC :: DE \cdot DF$, cioè come i seni degli angoli opposti, sarebbero i lati AB , ed AC uguali.

IV. Se in un triangolo ABC si dividono pel mezzo l'angolo A con la retta AD , e l'angolo C con la retta CH , le quali rette convengano in G , FIG. 143. congiunta la BGI , taglierà pel mezzo l'altro angolo B , perchè essendo $AB \cdot AC :: BD \cdot DC$; e permutando $AB \cdot BD :: AC \cdot DC$; ed $AC \cdot DC :: AG \cdot GD$, essendo l'angolo ACD diviso pure pel mezzo dalla CGH , dunque $AB \cdot BD :: AG \cdot GD$; dunque ancora l'angolo ABD è diviso pel mezzo dalla BGI ; onde le rette seganti pel mezzo tutti gli angoli d'un triangolo convengono insieme nel medesimo punto G .

PROPOSIZIONE XVIII.

Se la retta AD tocca il cerchio EDB nel punto D , condotta la perpendicolare DG sopra il diametro $AECB$, tutte le linee condotte da' punti A , e G a qualsivoglia punto F della circonferenza, come AF , e GF , sono proporzionali alle stesse parti AE , ed EG .

Imperocchè condotti dal centro i raggi CD , CF ; essendo l'angolo ADC retto, e $AC \cdot CD :: CD \cdot CG$; dunque ancora sono proporzionali $AC \cdot CF :: CF \cdot CG$; onde il triangolo ACF , e l'altro FCG sono simili, aven-

do intorno all' angolo medesimo C i lati proporzionali, però l'angolo $CAF = CFG$; ed è l'angolo $CFE = CEF = EAF + AFE$; dunque $CFG + GFE = EAF + AFE$; ed essendo $CFG = EAF$, farà pure $GFE = AFE$; dunque l'angolo AFG è diviso pel mezzo dalla retta FE ; e però $AF \cdot FG :: AE \cdot EG$, in qualunque punto siano condotte le rette alla periferia circolare dalli due punti A, G . Il che dovea dimostrarsi.

C O R O L L A R J.

FIG. 145. I. Essendo ancora $AD \cdot DG :: AF \cdot FG$, il rettangolo di AD in GP è uguale al rettangolo di AF in DG , ed ancora tirate altre due linee dagli stessi punti A, G ad un altro punto H della circonferenza, essendo ancora queste $AH \cdot GH :: AF \cdot FG$, farà pure il rettangolo dell' estreme uguale al rettangolo delle mezzane, cioè AH in $FG = GH$ in AF .

II. Essendo ancora le porzioni del diametro $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, dicefi questa *Proporzione Armonica*; essendo delle tre linee AB, EB, GB . la prima alla terza, come la differenza della prima dalla media alla differenza della media dalla terza; in cui ancora permutando $AB \cdot AE :: BG \cdot GE$, cioè delle tre linee BA, GA, EA la prima alla terza è come l'eccesso della prima dalla seconda all' eccesso della seconda dalla terza; e quella linea di mezzo dicefi *Media Armonica*.

PRO.

PROPOSIZIONE XIX.

Essendo la linea *AB* divisa ne' punti *E*, *G* ar- FIG. 146.
monicamente, preso fuori qualunque punto *D*, e
da esso condotte le rette *DA*, *DE*, *DG*, *DB*,
qualunque altra linea, che tra esse si tiri *MOKN*,
sarà essa pure armonicamente divisa, cioè ancora
 $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$.

SI tiri per lo punto *G* la retta *FGH* parallela
a *DA*, concorrente con le rette *DB*, *DE*
in *H*, *F*, sarà $GH = GF$; perchè essendo si-
mili li triangoli *ABD*, e *BHG*; ed ancora si-
mili *AED*, *GEF*; dunque $AD \cdot GH :: AB \cdot BG$
 $:: AE \cdot EG :: AD \cdot GF$; dunque $GH = GF$; e
per lo punto *K* tirata un'altra *IKL* parallela ad
AD, ed altresì ad *FGH*, sarà ancora $IK = KL$;
dunque $DM \cdot KL :: DM \cdot KI$; ma essendo si-
mili pure i triangoli *DMN*, *LKN*, e gli altri
due *DMK*, *IKO*, sarà pure $MN \cdot NK :: DM$
 $\cdot KL :: DM \cdot KI :: MO \cdot OK$; dunque anco-
ra la retta *MN* è divisa dall' istesse rette armo-
nicamente, essendo $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$: Il
che &c.

COROLLARI.

I. Se le rette *AM*, *EO*, *GK*, *BL* non con-
venissero in un punto *D*, ma fossero tra loro pa-
rallele, è manifesto, che qualunque altra retta
MOKN, segata da esse, sarà divisa armonica-
mente, essendo nella stessa proporzione *AB*, ed
MN segate da esse parallele, cioè $AB \cdot BG$
 $:: MN \cdot NK$; ed $AE \cdot EG :: MO \cdot OK$; onde
sic-

FIG. 147.

ficcome $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, così pure $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$.

FIG. 148. II. Volendo segare armonicamente una retta AB , fattoci sopra un triangolo ADB , e per qualsivoglia punto G condotta la retta GH parallela ad AD , e prolungatala in F , di maniera, che sia $GF = GH$, congiunta DF , che seghi la base AB in E , farà AB armonicamente divisa, perchè $AD \cdot GH :: AD \cdot FG$; ed è $AD \cdot GH :: AB \cdot BG$; ed $AD \cdot GF :: AE \cdot EG$; dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$.

FIG. 149. III. In un triangolo ADG diviso pel mezzo l'angolo interno ADG con la retta DE , e l'esterno GDC diviso pure pel mezzo con la retta DB , farà divisa la retta $AEGB$ armonicamente, perchè farà tanto AB a BG , come i lati AD a DG , quanto AE ad EG , come i suddetti lati, pel Coroll. I. della Prop. 17. dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$: Ove si avverta, che l'angolo EDB farà retto, essendo la somma degli angoli $EDG + GDB$ uguale alli rimanenti $ADE + BDC$, e però esso angolo EDB è la metà della somma degli angoli fatti in D sopra la retta AC , li quali essendo uguali a due retti, bisogna che la loro metà EDB sia pure un angolo retto.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 150. *In qualsivoglia quadrilatero iscritto nel cerchio il rettangolo contenuto da' suoi diametri AC , e BD , è uguale alli due rettangoli fatti dai lati opposti, AB in DC , ed AD in BC .*

Fac-

F Acciasi l'angolo ABE uguale a DBC ; essendo ancora l'altro angolo $BAE = BDC$, sono simili essi triangoli BAE , BDC , onde $BA \cdot AE :: BD \cdot DC$, ed il rettangolo AB in DC è uguale al rettangolo di BD in AE ; similmente l'angolo CBE sarà uguale all'angolo ABD , essendo DBE comunemente aggiunto agli uguali angoli DBC , e ABE ; onde ancora il triangolo BCE sarà simile al triangolo BDA , essendovi pure uguali gli angoli BCE , BDA ; dunque $BC \cdot CE :: BD \cdot DA$, e però il rettangolo AD in BC è uguale al rettangolo BD in CE ; dunque BD in $AE \rightarrow BD$ in CE , cioè BD in $AC = AB$ in DC , $\rightarrow AD$ in BC . Il che &c.

COROLLARI.

I. Se le corde AD , DC sono uguali, e così pure gli archi, e gli angoli ABD , DBC , segandosi i diametri del quadrilatero in E , sarà BD in $AE = AB \times DC = BAD$; e DB in $CE = AD \times BC = DCB$; sicchè in tali triangoli BAD , BCD il rettangolo de' lati è uguale al rettangolo della base in quella porzione di linea, dal loro vertice alla base proposta, cioè $BAD = BD \times AE$, e $BCD = BD \times CE$.

II. Essendo pure ivi $AC \times BD = AD \times BC \rightarrow DC \times AB$, cioè $= AD$ in $BC \rightarrow BA$; dunque $AD \cdot AC :: DB \cdot CB \rightarrow AB$.

III. Onde preso un altro punto b , e tirate le corde Cb , Ab , Db , sarà pure $AD \cdot AC :: Db \cdot Cb \rightarrow Ab$; dunque qualsivoglia retta DB alla somma delle due corde CB , AB è nella stessa proporzione, in cui un'altra retta Db è alla som-

somma delle corde Cb , Ab , quando l'arco ADC è diviso pel mezzo in D .

IV. Se poi fosse ancora $AD = AC$, cioè quando il triangolo inscritto nel cerchio fosse equilatero, farebbe pure qualunque media DB uguale alla somma dell'estreme $CB \rightarrow AB$, e così pure $Db = Cb \rightarrow Ab$.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 152.

Nel triangolo ADG diviso pel mezzo l'angolo interno GDA colla retta DE , ed ancora l'esterno GDC colla retta DB , la quale converrà colla base AG prolungata in B , purchè le rette AD , e DG non siano uguali, sarà il rettangolo ADB uguale al rettangolo AEG col quadrato DE ; ed ancora uguale al rettangolo ABG , detrattone il suo quadrato DB .

Imperochè circoscritto il cerchio $AFGH$ intorno al dato triangolo ADG , e prodotte le rette DE , BD nella sua periferia in F , ed H , si congiungano le rette AF , AH . Primieramente circa la divisione dell'angolo interno ADG , si averà il triangolo ADF simile all'altro GDE , per essere uguali gli angoli ADF , GDE ; ed ancora gli altri due AFD , EGD ; però sarà $FD \cdot DA :: GD \cdot DE$; dunque sarà il rettangolo $ADG = FDE$, cioè $= FED \rightarrow DE$, che è il rettangolo $FED = AEG$, onde il rettangolo de' lati AD , e DG uguaglia il rettangolo delle parti della base AE , ed EG , col quadrato della retta DE , che divide pel mezzo l'angolo interno ADG . Secondariamente, circa la divisione dell'

an-

angolo esterno GDC colla retta DB in due parti uguali, farà pure il triangolo ADH simile all' altro BDG , per essere l'angolo $ADH = BDC = BDG$, e l'angolo $AHD = BGD$, perchè tanto questo, che quello con l'angolo AGD comprende due retti (come si è dimostrato nella parte prima Prop. 14. Coroll. 2. che il quadrilatero inscritto nel cerchio, come $AHDG$, ha gli due angoli opposti H , e G uguali a due retti) dunque sono $AD \cdot DH :: BD \cdot DG$, e però $ADG = BDH = HBD - BD^2$; ed è $HBD = ABG$; dunque $ADG = ABG - BD^2$, onde il rettangolo de' lati ADG è uguale al rettangolo ABG , detrattone il quadrato DB , come dovea dimostrarfi.

C O R O L L A R I O.

Quindi il rettangolo ADG col quadrato DB farà uguale al rettangolo ABG ; ed ADG , meno il quadrato $DE = AEG$.

P R O P O S I Z I O N E XXII.

Essendo inscritto nel cerchio il triangolo equilatero BCA , da' punti B, A, C a qualunque punto F della periferia condotte le rette BF, AF, CF , i loro quadrati saranno sempre uguali alli due quadrati di AB , ed AC .

FIG. 153.

SI tiri il diametro AG , segante il lato BC in E , e si congiungano EF, GF , e si tiri EH perpendicolare ad AF , che farà parallela a GF , per essere ancora retto l'angolo GFA ; onde $FH = \frac{1}{4} FA$, siccome $GE = \frac{1}{4} AG$, perciò due rettan-

tangoli AFH sono uguali al rettangolo di AF , nella sua metà, cioè al quadrato AF diviso pel mezzo; onde essendo il quadrato $AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2 AFH$, farà perciò $AE^2 = EF^2 + \frac{1}{2} AF^2$; e duplicandolo, farà $2 AE^2 = 2 EF^2 + AF^2$; ed aggiuntivi due quadrati di EB , farà $2 EB^2 + 2 AE^2 = 2 EF^2 + AF^2 + 2 EB^2$; ma $2 EF^2 + 2 EB^2 = BF^2 + CF^2$ (come si è detto nella parte prima Prop. 23) dunque $2 EB^2 + 2 AE^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2$; ed è $AB^2 + AC^2 = 2 AB^2 = 2 AE^2 + 2 EB^2$; dunque li tre quadrati $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB^2 + AC^2$; e però a qualunque punto F siano le rette congiunte da' punti A, B, C , fanno sempre li tre quadrati uguali alli quadrati de' lati AB , ed AC ; come dovea dimostrarsi.

C O R O L L A R I O.

Quindi ancora il quadrato AF , col doppio quadrato EF , è sempre uguale a' due quadrati AE , dovunque sia il punto F , perchè $2 AE^2 + 2 BE^2 = AB^2 + AC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 = AF^2 + 2 EF^2 + 2 BE^2$, dunque $2 AE^2 = AF^2 + 2 EF^2$

DISSERTAZIONE

Delle Proporzioni , che si notano nella
mia Tavola Analogica.



Preso qualunque angolo BAC , da' termini TAV. X.
de' suoi lati BC si tirino le rette BE , CD
a qualsivoglia punto del lato opposto , tal quale o
rimanga , o sia prodotto l' uno , o l' altro , o ambi-
due al di sotto , o al di sopra , come si vede in
quelle dodici figure , ivi ne rimangono le stesse pro-
porzioni assegnate in essa Tavola . le quali sono
sessantasei , per il paragone di esse linee intiere ,
e loro parti , che sono dodici , cioè (concorrendo
esse rette BE , CD in F , non ponendole paral-
lele) riescono AB , AC , BE , CD , AD , DB ,
 BF , EF , AE , CE , CF , DF , di cui ciascuna
può essere paragonata a qualunque dell' altre .

Nell' *Almagesto* di *Ptolomeo* solamente sei pro-
porzioni si dimostrano delle parti di qualsivoglia
retta , o al più delle intiere loro parti , il che da
altri *Matematici* è stato proposto con diciotto pro-
porzioni , e non l' altre , che da me si variano
in tante maniere ; e solamente da essi fu osservato
il caso della figura prima ; cioè quando le ret-
te BE , CD concorrano dentro le AC , AB , non
prodotte al di sotto , o al di sopra ; ma da me in
12 figure diversi altri casi si propongono , e pure
ciascuna in qualunque figura ha la medesima
proporzione , come sarà da me dimostrato .

Però

Però in quattro maniere si pongono tali porzioni. La prima si vede nelli sei rombi in mezzo di essa Tavola, in cui si paragonano le rette opposte ad un quadrilatero in qualche figura, cioè AD, EF, ed AE, DF nelle figure 1, 7, 9, 11; ed ancora AB, CF, ed AC, BF nell'altre 2, 8, 10, 12; e finalmente BE, DC, e BD, CE nell'altre figure 3, 4, 5, 6: Benchè in altré figure s'iano esse rette diversamente poste, da per tutto però devono avere le stesse proporzioni, che ivi sono duplicate di un rettangolo ad un altro. Per esempio AB a CF tanto ha la proporzione di AD in BE ad EF in CD, quanta ancora quella di AE in BD a DF in CE; e così gli altri hanno pure le due proporzioni, riposte ivi in essa Tavola.

TAV. XI. Per dimostrare, che gli corrispondano tali proporzioni, si tiri in tutte le dodici figure la retta AH parallela a CF, e conveniente con BFE in H, la quale nelle prime sei figure prolungasi fuori, e non nelle sei altre; come ancora conduca la FG parallela ad AB, concorrente con AE in G, la quale non si prolunga nelle figure 1, 2, 7, 8, 9, 10, ma bensì nell'altre. Ciò posto, essendo $AB \cdot AH :: BD \cdot DF$; ed $AH \cdot CF :: AE \cdot CE$ in ciascuna figura, sarà dunque in tutte $AB|CF \parallel \begin{array}{l} AE \\ BD \end{array} \begin{array}{l} DF \\ CE \end{array}$; ed essendo pure $AB \cdot FG :: BE \cdot EF$, ed $FG \cdot CF :: AD \cdot CD$, sarà ancora $AB|CF \parallel \begin{array}{l} AD \\ BE \end{array} \begin{array}{l} EF \\ CD \end{array}$. In due maniere dunque si ha la proporzione di AB a CF, cioè nella prima è come il rettangolo di AE in BD, al rettangolo

golo di CE in DF, e nella seconda rimane pure, come il rettangolo di AD in BE a quello di EF in CD.

Parimente essendo $BF \cdot FH :: BD \cdot AD$, ed $FH \cdot AC :: EF \cdot CE$, sarà pure $BF | AC \parallel \begin{array}{c} EF \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} AD \\ CE \end{array}$, che sarà la sua prima proporzione; ma è ancora $BF \cdot AG :: BE \cdot AE$, ed $AG \cdot AC :: DF \cdot CD$; dunque la seconda sua proporzione è $BF | AC \parallel \begin{array}{c} DF \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} AE \\ CD \end{array}$. In oltre da queste proporzioni se ne cavano dell'altre, cioè da quella $AB | CF \parallel \begin{array}{c} AD \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} EF \\ CD \end{array}$ sarà pure $AD | EF \parallel \begin{array}{c} AB \\ CD \end{array} | \begin{array}{c} CF \\ BE \end{array}$, e dalla $BF | AC \parallel \begin{array}{c} EF \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} AD \\ CE \end{array}$, si cava la seconda $AD | EF \parallel \begin{array}{c} AC \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} BF \\ CE \end{array}$; e similmente da $AB | CF \parallel \begin{array}{c} AD \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} EF \\ CD \end{array}$ se ne cava $BE | CD \parallel \begin{array}{c} AB \\ EF \end{array} | \begin{array}{c} CF \\ AD \end{array}$; ed ancora da $BF | AC \parallel \begin{array}{c} DF \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} AE \\ CD \end{array}$ sarà $BE | CD \parallel \begin{array}{c} AE \\ BF \end{array} | \begin{array}{c} DF \\ AC \end{array}$. Parimente da $AB | CF \parallel \begin{array}{c} AE \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} DF \\ CE \end{array}$ dovrà essere $AE | DF \parallel \begin{array}{c} AB \\ CE \end{array} | \begin{array}{c} CF \\ BD \end{array}$; e da $BF | AC \parallel \begin{array}{c} DF \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} AE \\ CD \end{array}$, si ha pure $AE | DF \parallel \begin{array}{c} AC \\ BE \end{array} | \begin{array}{c} BF \\ CD \end{array}$; ed ancora da $AB | CF \parallel \begin{array}{c} AE \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} DF \\ CE \end{array}$ si cava $BD | CE \parallel \begin{array}{c} AB \\ DF \end{array} | \begin{array}{c} CF \\ AE \end{array}$, e dalla $BF | AC \parallel \begin{array}{c} EF \\ BD \end{array} | \begin{array}{c} AD \\ CE \end{array}$ ne riesce $BD | CE \parallel \begin{array}{c} BF \\ AD \end{array} | \begin{array}{c} AC \\ EF \end{array}$; onde così tutte quelle rette, che in qualche figura si restano opposte ad un quadrilatero, ed in altre

sono diversamente poste, hanno le due simili proporzioni d' un rettangolo ad un altro, come si vede nelli sei Rombi di mezzo della Tavola Analogica.

La seconda maniera delle proporzioni è di qualunque retta con una delle sue parti, o con un altro lato in qualche triangolo, o d' una parte ad un'altra, che insieme si uniscano, le quali saranno 24, ed averanno una sola proporzione d' un rettangolo ad un altro, e si cavano dalle proporzioni delle sei prime, anzi dalle due sole possono ridursi. Per esempio, essendosi dimostrato, essere

$AB|CF \parallel \begin{array}{c} AE|DF \\ BD|CE \end{array}$ si può cavarne $AB|BD \parallel \begin{array}{c} AE|DF \\ CF|CE \end{array}$,
 ed $AB|AE \parallel \begin{array}{c} BD|CE \\ CF|DF \end{array}$, ed $AE|CE \parallel \begin{array}{c} AB|CF \\ DF|BD \end{array}$,
 e $CF|DF \parallel \begin{array}{c} CE|BD \\ AB|AE \end{array}$, e $CF|CE \parallel \begin{array}{c} DF|AE \\ AB|BD \end{array}$, e
 $BD|DF \parallel \begin{array}{c} AB|CF \\ CE|AE \end{array}$. Similmente essendo

$AB|CF \parallel \begin{array}{c} AD|EF \\ BE|CD \end{array}$, se ne cava $AB|BE \parallel \begin{array}{c} AD|EF \\ CF|CD \end{array}$,
 ed $AB|AD \parallel \begin{array}{c} BE|CD \\ CF|EF \end{array}$, ed $AD|DC \parallel \begin{array}{c} AB|CF \\ EF|BE \end{array}$,
 e $CF|CD \parallel \begin{array}{c} EF|AD \\ AB|BE \end{array}$, e $CF|EF \parallel \begin{array}{c} CD|BE \\ AB|AD \end{array}$,
 e $BE|EF \parallel \begin{array}{c} AB|CF \\ CD|AD \end{array}$. Parimente essendo
 $BF|AC \parallel \begin{array}{c} EF|AD \\ BD|CE \end{array}$, sarà $BF|BD \parallel \begin{array}{c} EF|AD \\ AC|CE \end{array}$,
 ed $EF|BF \parallel \begin{array}{c} CE|BD \\ AD|AC \end{array}$, ed $AC|CE \parallel \begin{array}{c} AD|EF \\ BF|BD \end{array}$

ed

ed $AC|AD \parallel \begin{smallmatrix} CE \\ BF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BD \\ EF \end{smallmatrix}$, ed $AD|BD \parallel \begin{smallmatrix} AC \\ EF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BF \\ CE \end{smallmatrix}$
 ed $EF|CE \parallel \begin{smallmatrix} BF \\ AD \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} AC \\ BD \end{smallmatrix}$; ed essendo ancora
 $BF|AC \parallel \begin{smallmatrix} DF \\ BE \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} AE \\ CD \end{smallmatrix}$, sarà pure $BF|BE \parallel \begin{smallmatrix} DF \\ AC \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} AE \\ CD \end{smallmatrix}$,
 e $BF|DF \parallel \begin{smallmatrix} BE \\ AC \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} CD \\ AE \end{smallmatrix}$, ed $AC|AE \parallel \begin{smallmatrix} CD \\ BF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BE \\ DF \end{smallmatrix}$,
 ed $AE|BE \parallel \begin{smallmatrix} AC \\ DF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BF \\ CD \end{smallmatrix}$, ed $AC|CD \parallel \begin{smallmatrix} AE \\ BF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} DF \\ BE \end{smallmatrix}$,
 e finalmente $CD|DF \parallel \begin{smallmatrix} AC \\ BE \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BF \\ AE \end{smallmatrix}$; e in tal modo si
 dimostrano tutti i casi, che si considerano nella seconda
 maniera.

Circa poi la terza, si prendono due rette unite
 ad un angolo, cui non sia sottoposta la base, cioè
 queste dodici, $AB \cdot AC$ ed $AB \cdot BF$, e BF
 $\cdot CF$, ed $AC \cdot CF$, ed $AD \cdot AE$, ed AE
 $\cdot EF$, ed $EF \cdot DF$, ed $AD \cdot DF$, e $BD \cdot CD$,
 e $CD \cdot CE$, e $BD \cdot BE$, e $BE \cdot CE$, la di cui pro-
 porzione è di tre parti a tre altre, come sarebbe
 d'un rettangolo ad un altro, e di una ad un'al-
 tra retta. Queste si trovano dalle doppie propor-
 zioni della prima maniera; imperocchè essendo

$AB|CF \parallel \begin{smallmatrix} AE \\ BD \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} DF \\ CE \end{smallmatrix}$, ed $\begin{smallmatrix} ADEF \\ BECD \end{smallmatrix}$ sarà questa uguale
 a quella, e però il prodotto de' primi, e degli ultimi
 sarà uguale al prodotto de' medj, cioè $AE \cdot BD \cdot EF$
 $\cdot CD$ si uguaglia a $DF \cdot CE \cdot AD \cdot BE$; però deve essere
 $AD|AE \parallel \begin{smallmatrix} BDC \\ EF \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BEC \\ DF \end{smallmatrix}$, e $BE|BD \parallel \begin{smallmatrix} AEF \\ CD \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} ADF \\ CE \end{smallmatrix}$,
 e $CE|CD \parallel \begin{smallmatrix} AEF \\ BD \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} ADF \\ BE \end{smallmatrix}$, e $DF|EF \parallel \begin{smallmatrix} BDC \\ AE \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} BEC \\ AD \end{smallmatrix}$;

Indi similmente, essendo $BE|CD|BF|AC$, ed $AE|DF$, ed $AB|CF$,
 saranno pure uguali i prodotti di quattro in quat-
 tro, cioè $AC \cdot DF \cdot AB \cdot EF = BF \cdot AE$
 $CF \cdot AD$, onde ne seguono $AB|BF||DAE|DFE$
 ed $AE|EF||BAC|BFC$, ed $AD|DF||BAC|BFC$
 ed $AC|CF||DAE|DFE$. Finalmente, essendo
 $AE|DF||AB|CF$, ed $AC|BF||BE|CD$, restano uguali $AB \cdot CE$
 $\cdot BF \cdot CD$, e $CF \cdot BD \cdot AC \cdot BE$; onde ne riesce
 $AB|AC||DBE|DCE$, e $CE|BE||ACF|ABF$,
 e $BF|CF||DBE|DCE$, e $BD|CD||ABF|ACF$,
 e così riescono tutte le proporzioni di questa terza
 maniera.

Ma finalmente la quarta maniera delle propor-
 zioni, che ha più parti da proporfi, cioè un qua-
 drato ad un altro, ed un rettangolo ad un altro,
 ed una retta ad un' altra, ha pure 24. pro-
 porzioni di quelle rette, che non convengono nello
 stesso punto, ne sono opposte in un rettangolo, ma
 disparate affatto l' una dall' altra, che tali sono
 $AB \cdot CD$, ed $AB \cdot EF$, ed $AB \cdot DF$; ed AB
 $\cdot CE$, e $BF \cdot CD$, e $BF \cdot AE$, e $BF \cdot AD$,
 e $BF \cdot CE$, e $AD \cdot CE$, e $CE \cdot DF$, e BE
 $\cdot CF$, e $BE \cdot AC$, e $BE \cdot AD$, e $BE \cdot DF$, e
 $DF \cdot AC$, e $AD \cdot CF$, ed $EF \cdot AC$, ed $EF \cdot BD$,
 ed $EF \cdot CD$, e $AE \cdot CF$, e $AE \cdot BD$, e AE
 $\cdot CD$, e $BD \cdot CF$, e $AC \cdot BD$; Ad esse pa-
 ra-

ragionare si possono le loro proporzioni in questa maniera. Tra le due AB, CD si interpongano CF, e DF, e si osservi essere $AB|CF \parallel \frac{AE}{BD} \frac{DF}{CE}$, e trapposte di quà, e di là $CF \cdot DF$, si osservi ancora essere $DF|CD \parallel \frac{BF}{AE} \frac{AC}{BE}$; dunque essendo

$$\begin{array}{l} AB|CF \parallel \frac{AE}{BD} \frac{DF}{CE} \\ CF|FD \parallel \frac{CF}{BF} \frac{DF}{AC} \\ FD|CD \parallel \frac{AE}{BE} \frac{DF}{CE} \end{array} \text{rimane } AB|CD \parallel \frac{AE^2}{DBF} \frac{DF^2}{ACE}$$

onde ancora dovrà essere $BE|CF \parallel \frac{AE^2}{DBF} \frac{DF^2}{ACE}$,
 $DC|AB$;

ed $AC|BD \parallel \frac{AE^2}{DCF} \frac{DF^2}{ABE}$, e $CE|BF \parallel \frac{AE^2}{DCF} \frac{DF^2}{ABE}$,
 $BF|CE \parallel \frac{BD}{AC}$.

E similmente tra le due BF, AE interposte AC, e CE, sarà $BF|AC \parallel \frac{EF}{BD} \frac{AD}{CE}$, e trapposte di quà,

e di là $AC \cdot CE$, essendo $CE|AE \parallel \frac{CF}{BD} \frac{AB}{DF}$,

ne risulta pure $BF|AE \parallel \frac{BD^2}{CFE} \frac{CE^2}{BAD}$; onde pure

$DF|AC \parallel \frac{BD^2}{CFE} \frac{CE^2}{BAD}$, ed $AB|FE \parallel \frac{BD^2}{CAE} \frac{CE^2}{BFD}$,
 $AE|BF \parallel \frac{CF}{AD}$,

ed $AD|CF \parallel \frac{BD^2}{CAE} \frac{CE^2}{BFD}$. Poscia tra le due CE, AB
 $EF|AB$.

si frappongano BD, e AD, sarà $CE|BD \parallel \begin{array}{c} AC \\ EF \end{array} \begin{array}{c} BF \\ AD \end{array}$,
e ritenuto di quà, e di là $BD \cdot AD$, *ed essendo*
 $AD|AB \parallel \begin{array}{c} CD \\ EF \end{array} \begin{array}{c} BE \\ CF \end{array}$, *riuscirà* $CE|AB \parallel \begin{array}{c} EF^2 \\ ACD \end{array} \begin{array}{c} AD^2 \\ EBF \end{array}$
 $BD \parallel CF$,
onde pure $CF|BD \parallel \begin{array}{c} EF^2 \\ ACD \\ AB \end{array} \begin{array}{c} AD^2 \\ EBF \\ CE \end{array}$, *e*
 $BE|AC \parallel \begin{array}{c} EF^2 \\ ABD \\ CD \end{array} \begin{array}{c} AD^2 \\ ECF \\ BF \end{array}$, *e* $BF|CD \parallel \begin{array}{c} EF^2 \\ ABD \\ AC \end{array} \begin{array}{c} AD^2 \\ ECF \\ BE \end{array}$.
Parimente tra le due BE, DF interposti CD.CF,
sarà $BE|CD \parallel \begin{array}{c} AB \\ EF \end{array} \begin{array}{c} CF \\ AD \end{array}$, *e ritenuto di quà, e di là*
 $CD \cdot CF$, *essendo pure* $CF|DF \parallel \begin{array}{c} CE \\ AB \end{array} \begin{array}{c} BD \\ AE \end{array}$, *ne*
riesce $BE|DF \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CEF \\ CD \end{array} \begin{array}{c} CF^2 \\ ADB \\ AE \end{array}$; *ed* $AE|CD \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CEF \\ DF \end{array} \begin{array}{c} CF^2 \\ ADB \\ BE \end{array}$,
e $AD|CE \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CDF \\ EF \end{array} \begin{array}{c} CF^2 \\ AEB \\ BD \end{array}$, *e* $BD|EF \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ CDF \\ CE \end{array} \begin{array}{c} CF^2 \\ AEB \\ AD \end{array}$.
In oltre interposte alle due DF, CE le rette AE,
AC, sarà $DF|AE \parallel \begin{array}{c} BF \\ CD \end{array} \begin{array}{c} AC \\ BE \end{array}$; *e ritenuto di quà,*
e di là $AE \cdot AC$, *essendo pure* $AC|CE \parallel \begin{array}{c} AD \\ BF \end{array} \begin{array}{c} EF \\ BD \end{array}$ *ne*
riesce $DF|CE \parallel \begin{array}{c} BF^2 \\ ADC \\ AE \end{array} \begin{array}{c} AC^2 \\ BEF \\ BD \end{array}$, *onde* $BD|AE \parallel \begin{array}{c} BF^2 \\ ADC \\ CE \end{array} \begin{array}{c} AC^2 \\ BEF \\ DF \end{array}$,
ed $EF|CD \parallel \begin{array}{c} BF^2 \\ AEC \\ AD \end{array} \begin{array}{c} AC^2 \\ BDF \\ BE \end{array}$, *e* $BE|AD \parallel \begin{array}{c} BF^2 \\ AEC \\ CD \end{array} \begin{array}{c} AC^2 \\ BDF \\ EF \end{array}$.

Finalmente tra AD, e BF interposti EF, BE, sarà pure $AD|EF \parallel \begin{array}{c} AC \\ BD \end{array} \begin{array}{c} BF \\ CE \end{array}$, e ritenuto di quà,

e di là $EF \cdot BE$, essendo poi $BE|BF \parallel \begin{array}{c} AEDF \\ CDAC \end{array}$, ne

risulta $AD|BF \parallel \begin{array}{c} CD^2 \\ BAE \end{array} \begin{array}{c} BE^2 \\ CFD \end{array}$; onde $AC|EF \parallel \begin{array}{c} CD^2 \\ RAE \end{array} \begin{array}{c} BE^2 \\ CFD \end{array}$
 $\begin{array}{c} EF \\ AC \end{array} \parallel \begin{array}{c} BF \\ AD \end{array}$,

e $CF|AE \parallel \begin{array}{c} CD^2 \\ BFE \end{array} \begin{array}{c} BE^2 \\ CAD \end{array}$, e $DF|AB \parallel \begin{array}{c} CD^2 \\ BFE \end{array} \begin{array}{c} BE^2 \\ CAD \end{array}$
 $\begin{array}{c} AB \\ DF \end{array} \parallel \begin{array}{c} AE \\ CF \end{array}$;

onde tutte sono dimostrate, e ben disposte nella Tavola Analogica, in cui può osservarsi, come si corrispondono i quadrilateri dal mezzo ugualmente lontani, con molte parti uguali; e l'ultime corrispondenti alle opposte rette, cui corrispondono l'altre proporzioni.

Può ancora osservarsi, che in queste figure, se vi fossero due rette, o due parti uguali, le altre, che siano proporzionali con esse, averanno proporzione meno composta. Per esempio, se fosse $BD = CE$, sarebbero AE in $CF = DF$ in AB , ed EF in $AC = AD$ in BF , onde $AB \cdot AE :: CF \cdot DF$, ed $AC \cdot AD :: BF \cdot EF$, ed

$AE|AE \parallel \begin{array}{c} DC \\ EF \end{array} \begin{array}{c} BE \\ DF \end{array}$, ed $AE|CD \parallel \begin{array}{c} AB^2 \\ DFE \end{array} \begin{array}{c} CF^2 \\ AD \times BE \end{array}$,

e così troverassi in molte altre proporzioni. Così ancora se fosse $AB = AC$, sarebbe $BF|CF \parallel DBE$

$|DCE$, e $BF|AE \parallel \begin{array}{c} BE^2 \\ CFE \end{array} \begin{array}{c} CD^2 \\ ADF \end{array}$ e $BF|AD \parallel \begin{array}{c} BE^2 \\ CFD \end{array} \begin{array}{c} CD^2 \\ AEF \end{array}$.

Il che potrà ricavarfi da altre parti, cavandone proporzioni più semplici di quelle poste in essa Tavola Analogica.

Finalmente si può dimostrare nell' altre dodici figure, cioè dalle 13. alle 24., che tirata la retta BC, e la retta DE, e la retta AF, le quali (se non riuscissero parallele) converranno insieme; cioè AF con BC in G, e con DE in H, ed ancora BC con DE in I, onde armonicamente disposte riesciranno, cioè $BG \cdot GC :: BI \cdot IC$, e parimente $DH \cdot HE :: DI \cdot IE$, ed $AH \cdot HF :: AG \cdot GF$, essendo ancora proporzionali i triangoli DAE . DFE :: BAC . BFC, ed altri, di cui parleremo; e può ciò dimostrarsi colle proporzioni della terza maniera, poste nella medesima

Tavola Analogica: cioè essendo $AC \parallel CF \parallel \begin{array}{l} DAE \\ BF \end{array} \parallel \begin{array}{l} DFE \\ AB \end{array}$, sarà il prodotto delle quattro rette DF . FE . AB . AC uguale a quello dell' altre quattro DA . AE . BF . CF; dunque li rettangoli BAC . DAE :: BFC; ed avendo li triangoli BAC, e DAE il medesimo angolo, riescono proporzionali ad essi rettangoli, e così pure li triangoli BFC, e DFE avendo uguali angoli in F, sono parimente proporzionali a' medesimi rettangoli; onde li triangoli BAC . DAE :: BFC . DFE, e permutando BAC . BFC :: DAE . DFE; ma BAC a BFC, avendo la stessa base BC, sono come l' altezze loro AG, e GF; ed ancora DAE, e DFE, sopra la stessa base DE, sono come le loro altezze AH, ed HF; dunque sono proporzionali AG . GF :: AH . HF, ed AG . AH :: GF . HF; sicchè armonicamente è divisa AG in H, F in qualsivoglia delle dette figure.

Così pure essendo $BA \parallel AC \parallel \begin{array}{l} DBE \\ CF \end{array} \parallel \begin{array}{l} DCE \\ BF \end{array}$, sarà
pure

pure DCE in ABF uguale a DBE in ACF, onde sono proporzionali i rettangoli, ed ancora i triangoli composti da DBE . ABF :: DCE . ACF; e permutando, saranno pure i triangoli DBE . DCE :: ABF . ACF; ma tirata sopra DE la CK parallela a BD, sarà DBE a DCE, come la retta BD alla CK, avendo ambidue la stessa base DE, e l' altezze proporzionali alle rette BD, CK parallele; ma BD . CK :: BI . IC; ed ancora ABF ad ACF è come BG a GC, sopra la stessa base AF de' medesimi triangoli; dunque siccome tali triangoli sono proporzionali, parimente BI . IC :: BG . GC, e BI . BG :: IC . GC, sicchè essa BI è disposta armonicamente in C, e G, in qualunque figura .

Essendo ancora DA } AE || $\begin{array}{l} \text{BDC} \\ \text{EF} \end{array}$ | $\begin{array}{l} \text{BEC} \\ \text{DF} \end{array}$, ne riesce pure BEC in ADF, uguale a BDC in AEF, onde BDC . ADF :: BEC . AEF, tanto i rettangoli, quanto i triangoli, di cui permutando sarà pure BDC . BEC :: ADF . AEF; ed avendo i due primi la stessa base BC, sono come le loro altezze, onde tirata EL parallela a DB, sarà BDC . BEC :: DB . EL, cioè come DI ad IE; e gli altri due triangoli avendo la stessa base AF, e l' altezze proporzionali alle rette DH . HE, saranno pure ADF . AEF :: DH . HE; e perciò armonicamente si trova DI . IE :: DH . HE, e DI . DH :: IE . HE, in qualsivoglia figura .

E tanto basti di avere dimostrato in questa Dissertazione, benchè molte altre cose potevansi ricavare; e principalmente può osservarsi, che se le

rette

rette BE, CD perpendicolarmente fossero tirate a i lati opposti AC, AB, riuscendo simili tutti li triangoli rettangoli BAE, CAD, BDF, CEF, la proporzione di qualunque retta ad un'altra, riesce o tripla d'una parte ad un'altra parte, o dupla almeno di esse, o ancora dupla d'un rettangolo ad un altro, come può vedersi in quest' altra Tavola delle rette perpendicolari a' lati, ove ne riescono quattro figure diverse. In fatti, prendendo i lati di alcuno Triangolo, ne averanno tre proporzioni di una linea ad un'altra, per esempio AB a BE, sarà come AC a CD, ed ancora come BF a BD, ed altresì come CF a CE; e così pure AB ad AE, sarà come AC ad AD, e come BF a DF, e finalmente come CF ad EF; e simili proporzioni ne averanno gli altri: per esempio sarebbe AC a CD in ragione di AB a BE, e di BF a BD, e di CF a CE &c. onde se ne veggono dodici in essa Tavola delle rette perpendicolari al suo angolo.

Da queste medesime se ne cavano diciotto proporzioni duple d'una retta ad un'altra. Cioè essendo AB a BE, come AC, e CD, permutando, sarà AB ad AC, come BE a CD; ed essendo pure AB ad AE, come AC ad AD, sarà ancora AB ad AC, come AE alla AD, onde vi è a questi $AB \cdot AC :: BE \cdot CD :: AE \cdot AD$, che sono due simili proporzioni; e così dalle prime proporzioni terze de' lati a qualche triangolo rettangolo, se ne trovano quest' altre duple proporzioni dell' altre rette, che si vedranno appartenenti in essa medesima Tavola.

Poſcia le altre trentasei proporzioni hanno due
ma-

maniere d' un rettangolo ad un altro ; rimanendosi però alcune rette della prima maniera, e quelle della seconda. Cioè sarebbe AE a CD in ragione di AE a BE, e di BE a CD, ed essendo AE a BE in ragione di DF a BD, ed ancora di BF a CE (non prendendo l' altra di AD a CD, per avere in se il CD) ed il BE a CD, essendo come AB ad AC (lasciando l' altra di AE ad AD, per avere in se quella AE) perciò la AE a CD, sarà in ragione di AB ad AC, e di DF a BD, ed ancora in ragione di esse AB ad AC, e di EF a CE ; dunque due proporzioni si averanno

$AE | CD \parallel \frac{AB}{DF} | \frac{AC}{BD} \parallel \frac{AB}{EF} | \frac{AC}{CE}$; e così le altre parimente si troveranno, come potrà vedersi in essa Tavola, in cui tutte le due proporzioni d' un rettangolo ad un altro ci si mantengono in ambidue le due medesime rette, come $BE | CF \parallel \frac{AE}{CD} | \frac{EF}{AC} \parallel \frac{AE}{BD} | \frac{EF}{BF}$; e così

pure $AD | CE \parallel \frac{AC}{AF} | \frac{CF}{BE} \parallel \frac{AC}{DF} | \frac{CF}{BD}$; e così nel medesimo modo troveransi le altre ; Laddove, se le rette BE, CD non fossero a' lati dell' angolo AC, AB perpendicolari, le proporzioni nell' altra Tavola Analogica sono di più rette composte : per esempio

$AE | CD \parallel \frac{AB^2}{CEF} | \frac{CF^2}{ADB}, e BE | CF \parallel \frac{AE^2}{DBF} | \frac{DF^2}{ACE},$
 $\parallel \frac{AB^2}{DF} | \frac{CF^2}{BE} \parallel \frac{AE^2}{CD} | \frac{DF^2}{AB}$

ed ancora $AD | CE \parallel \frac{AB^2}{CDF} | \frac{CF^2}{AEB}$; e così negli al-

tri della quarta maniera ivi posta, e quelli ancora della maniera terza, che hanno la proporzione di

tre

tre rette a tre altre, come $AE \mid AD \mid \parallel \begin{array}{l} CEB \\ DF \end{array} \mid \begin{array}{l} BDC \\ EF \end{array}$,
 in quest' altra Tavola $AE \cdot AD :: AB \cdot AC$
 $:: BE \cdot CD$; e però l'essere tali rette perpen-
 dicolari a i lati dell'angolo, ne riescono con mag-
 giori numeri di proporzioni più piccole. E tanto
 basti.

ISTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTETERZA.

DEFINIZIONI.

I. Dicesi la retta AB perpendicolare al piano CDE , quando fa angoli retti con tutte le linee KL , GF , HI , &c. condotte in detto piano pel medesimo punto B , in cui cade essa AB perpendicolare. TAV. XII.
FIG. 154.

II. La retta AF dicesi inclinata allo stesso piano CDE secondo l'angolo acuto AFB , che contiene con la retta BF tiratagli dal punto B , in cui dal medesimo punto A cade la AB perpendicolare allo stesso piano. FIG. 155.

III. Il piano $EGHI$ dicesi perpendicolare al piano CDE , se le rette EG , AB , IH perpendicolari alla comune sezione HG di questi piani, sono ancora al soggetto piano CDE perpendicolari. FIG. 156.

IV. Ma l'altro piano $EKLI$ è inclinato al piano CDE secondo l'angolo acuto AFB , compreso dalle rette AF , FB perpendicolari alla comune sezione KL , quella in un piano, e questa in un altro.

V. I piani sono tra loro paralleli, se prolungati in infinito, verso qualunque parte, mai convengono insieme.

VI.

FIG. 157. VI. Angolo solido si dice quello, che resta contenuto da più linee AD , AC , AB , tirate dallo stesso punto A ; ma non poste nel medesimo piano.

FIG. 158. VII. Dicesi *Piramide* quel solido, che da qualunque base, o triangolare BDC , o quadrangolare $BDC E$, o pentagona $BDCFE$, o di qualunque altro poligono, ha le rette congiunte da' termini de' lati della base, ad un sublime punto A , ove fa l'angolo solido, che è il vertice di tale *Piramide*, la quale dicesi triangolare, se ha per base il triangolo, ovvero quadrangolare, se ha la base di quattro lati, o poligona, se ha la base di più lati.

FIG. 159. VIII. Se poi la base fosse un cerchio $BDEF$, e dal punto sublime A si vedessero tirate le rette per tutti i punti della circonferenza, questo solido si dirà *Cono*, di cui l'asse è la retta AC , dal vertice A al centro della base circolare condotta.

FIG. 160. IX. Il solido contenuto da due figure simili, ed uguali in piani paralleli, riuscendo gli altri piani laterali parallelogrammi, si dice *Prisma*; come $ABDC EF$ ha i piani paralleli simili, ed uguali BAF , DCE , ed i parallelogrammi $BACD$, $BDEF$, $ACEF$; e così ancora, se i piani paralleli fossero altri poligoni, tanto ciò sarebbe un *Prisma*.

FIG. 161. X. E se le basi parallele sieno cerchj uguali BDE , HGF , si dirà questo solido un *Cilindro*, il di cui asse è la retta AC , che congiunge i centri delle basi.

FIG. 161. XI. Ma essendo ancora tali basi parallelogrammi

mi $ABCD, EFGH$, tale solido fuol dirsi *Paralelepipedo*.

XII. *Sfera* dicesi il corpo generato dalla rivoluzione d' un semicircolo girato intorno al suo diametro, la di cui superficie è fatta da quella semiperiferia: Il centro di essa sfera è il medesimo, che quello del semicircolo generatore, e l' asse è il suo diametro fisso.

XIII. Se varj solidi compresi da simili, ed uguali figure piane, fossero nella sfera inscritte, si direbbero *Corpi regolari*.

XIV. Le figure solide simili sono quelle, che da figure piane simili si trovano comprese, con ugual numero di angoli solidi, ciascuno uguale al suo corrispondente.

XV. Simili ancora si dicono i con, ed i cilindri, le di cui basi circolari hanno i diametri proporzionali agli assi ugualmente inclinati al piano delle loro basi.

S C O L I O.

LE rette, che convengono insieme, sono certamente in un medesimo piano; e la retta, che sega due parallele, sta similmente nel piano di esse; ne può essere una retta, parte in un piano, e parte in un altro al di sopra: Quando però si segano due piani, la loro comune sezione è una linea retta, che tanto nell' uno, che nell' altro piano è contenuta; anzi per una medesima retta linea possono passare più Piani.

PROPOSIZIONE I.

Se la retta AD è perpendicolare sopra due ret- FIG. 163.

te DB , DC del piano sottopostogli, sarà ancora perpendicolare a qualunque altra linea DE di esso piano, onde sarà perpendicolare al piano medesimo.

SI taglino uguali le rette DB , DC , e congiunta la CB , che concorra con l'altra linea DE in E , si conducano da un punto A di essa linea AD le rette AB , AC , AE ; farà il triangolo BDC isoscele, ed ancora il triangolo ABC , perchè le rette AB , AC sono uguali, essendo i loro quadrati uguali al quadrato di AD , ed al quadrato di BD , o della uguale CD , per esser retti ambidue gli angoli ADB , ADC ; dunque per il Coroll. 5. della Prop. 19. della prima parte, il quadrato AB è uguale al quadrato AE col rettangolo BEC ; ed è ancora uguale a' quadrati AD , e BD , de' quali ancora il quadrato BD è uguale al quadrato DE col rettangolo BEC ; dunque il quadrato AE col rettangolo BEC è uguale a' quadrati AD , DE col medesimo rettangolo BEC ; e però tolto questo di quà, e di là, rimane il quadrato AE uguale a' quadrati AD , e DE ; onde bisogna, che ancora l'angolo ADE sia retto. Il che doveasi dimostrare.

C O R O L L A R I.

I. Quindi volendo erigere uno stilo perpendicolare all'orizzonte, o al muro, o a qualche altro piano, basta che si accomodi con due rette in quel piano tirate ad angolo retto, con qualche norma, e riuscirà perfettamente ad esso piano perpendicolare.

II.

II. Essendo la retta AB perpendicolare a tre FIG. 164.
rette BC, BD, BE , queste faranno in un medesimo piano; altrimenti, se CB fosse fuori del piano EBD , farebbe ABC un piano, ed EBD un altro, li quali converrebbero in una comune retta BF ; onde AB farebbe pure perpendicolare a BF , siccome all' altre due BD, BE ; e nell' altro piano l'angolo ABF retto, e però uguale al retto ABC , che è una sua parte, il che è impossibile.

III. Se nel piano CDB , cui è perpendicolare FIG. 165.
la AD , si tiri dal punto D la DC perpendicolare a BD , farà quella perpendicolare al piano ADB , facendo angolo retto con le due AD , e DB .

PROPOSIZIONE II.

*Le due rette AB, CD perpendicolari al piano FIG. 166.
 BDE sono tra di loro parallele, ed in un medesimo piano.*

Imperocchè, congiunta la retta BD , e fattagli perpendicolare la DE posta uguale ad AB , e congiunte le rette AD, AE, BE , farà $AD = BE$, essendo gli angoli ABD, EBD retti, con lati uguali, che gli comprendono, cioè $AB = DE$, e BD comune, e però le basi di tali triangoli ABD, BDE sono uguali; dunque ancora faranno li triangoli ABE, EDA uguali, avendo il lato AE comune, con gli uguali lati $AB = DE$, ed $AD = BE$; però ancora l'angolo retto $ABE = ADE$; dunque facendo la ED angolo retto con le tre linee BD, DA , e DC , esse linee so-

K

no

no nel medesimo piano, e però sono AB , DC parallele, avendo gli angoli interni ABD , CDB nel medesimo piano $CDBA$ uguali a due retti. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Vicendevolmente, se due rette CD , AB sono parallele, ed una di loro è perpendicolare al piano BDE , ancora l'altra vi farà perpendicolare; perchè essendogli perpendicolare AB , fatta $DE = AB$, posta ancor essa ad angolo retto alla BD , si è veduto, che farà ancora EDA angolo retto, e la DE perpendicolare al piano ADB , in cui è la stessa CD parallela ad AB , onde ancora l'angolo EDC farà retto, ed è pur retto CDB , come è retto ABD , avendosi gli angoli interni delle linee parallele uguali a due retti; dunque CD facendo angolo retto, e con DE , e con DB , è perpendicolare ancor essa al piano BDE .

FIG. 167. II. Non possono dal punto medesimo A nel piano CDE , o superiore ad esso piano, tirarsi due linee AB , AF , ambidue perpendicolari al piano stesso, dovendo essere parallele codeste perpendicolari, e però non convenienti in un punto A .

FIG. 168. III. Se due piani FG , IH sono amendue perpendicolari al sottoposto CDE , intersegandosi nella retta AB , farà questa perpendicolare al medesimo piano CDE ; altrimenti se dal punto B nel piano IH si tirasse la BK perpendicolare alla retta BH , e nel piano FG la BL perpendicolare alla BG , farebbero queste due BK , e BL per-

perpendicolari al sottoposto piano CDE ; il che è impossibile; dunque la BA solamente gli è dal punto B perpendicolare.

IV. Così pure si ha, che facendosi passare per qualunque retta AB perpendicolare al soggetto piano CDE , qualsivoglia piano IH , ovvero FG , riuscirà parimente esso piano perpendicolare al sottoposto.

V. Dal punto sublime A si può tirare la retta AB perpendicolare al soggetto piano CDE in questa maniera: Si tiri in esso piano qualunque retta GE , sopra di cui dal punto A , nel piano, che riesce AGE , si tiri la perpendicolare AI , e dal punto I tirata alla retta GE nel piano CDE la perpendicolare IB , sopra di essa si mandi dal punto A nel piano AIB la perpendicolare AB ; sarà questa al piano CDE perpendicolare, perchè avendo la EI angolo retto con AI , e con IB , essa è perpendicolare al piano AIB , onde tirando la BF parallela ad IE , ancor questa BF sarà perpendicolare allo stesso piano AIB ; onde faranno angoli retti ABF , ed ABI , e perciò la AB deve essere perpendicolare al piano CDE .

FIG. 169

VI. Quindi se da un punto F si vuole alzare la perpendicolare al piano CDE , da un punto sublime A tiratagli la perpendicolare AB , congiunta BF , e nel piano ABF tirata la FG parallela ad AB , sarà pure essa GF al piano CDE perpendicolare.

FIG. 170

PROPOSIZIONE III.

Le rette AB , EF essendo ad una terza CD

FIG. 171

K 2

pa-

parallele, non possa nello stesso piano di quelle, saranno esse AB , EF parallele pure tra loro.

Imperocchè nel piano delle due AB , CD tirata la CA perpendicolare a CD , e nel piano $DCEF$ tirata la CE parimente perpendicolare alla stessa CD , riuscirà CD perpendicolare al piano ACE , dunque ancora AB , e DF al medesimo piano saranno perpendicolari, e conseguentemente parallele tra loro, facendo angoli retti con la stessa linea AE . Il che &c.

C O R O L L A R J.

FIG. 172. I. Se per due linee parallele EF , CD passano due piani, concorrenti nella retta AB , questa pure sarà parallela a ciascuna di esse; altrimenti se per il punto B si tirasse nel piano AD , e nel piano AF le rette BG , BH parallele, quella a CD , e questa ad EF , farebbero esse tra loro parallele, ma in un punto B convenienti; il che è assurdo; dunque la AB dovrà essere parallela ad esse CD , EF , e non verun'altra tirata in essi piani dal punto B .

TAV. XIII.
FIG. 173. II. Se tra due piani CH , ED l'istessa retta AB è perpendicolare ad ambidue, saranno essi tra di loro paralleli; altrimenti se potessero insieme convenire in una retta CD , da qualunque punto I di essa condotte le rette IA , IB , ne riuscirebbe il triangolo IAB , che avrebbe in A , ed in B due angoli retti; il che è impossibile; dunque &c.

FIG. 174. III. Vicendevolmente, se i due piani CH , ED sono paralleli, la retta AB perpendicolare al primo

mo, farà pure al secondo perpendicolare; perchè condottagli la retta AG , con cui fa l'angolo retto BAG , il piano GAB segnerà l'altro ED nella retta BE , la quale farà pure parallela ad AG , onde ancora l'angolo ABF sarà retto; e per un'altra retta CA tirato il piano CAB , concorrente con l'altro ED in BE , farà pure l'angolo ABE retto, essendo ancora BE parallela ad AC ; dunque la AB , che era perpendicolare al piano CH , è perpendicolare ancora all'altro ED .

IV. Essendo poi due rette AB, AF , convenienti nel punto A parallele alle CD, CE convenienti in C in un altro piano, i loro angoli BAF, DCE faranno uguali, ed ancora i piani loro paralleli; perchè tagliata $AB = CD$, ed $AF = CE$, congiunte le rette AC, FE, BD faranno parallele, ed uguali, dunque ancora tirate le BF, DE sono uguali, e parallele, però i triangoli BAF, DCE sono simili, ed uguali, onde l'angolo $BAF = DCE$; ed il piano BAF è parallelo a DCE , avendosi tra loro le rette AC, BD, FE parallele, ed uguali, ed il solido $AFBDEC$ è un prisma.

FIG. 175;

PROPOSIZIONE IV.

L'angolo solido A , compreso da tre angoli piani, BAC, BAD, CAD , ne avrà sempre due di essi maggiori del terzo.

FIG. 176.

SE tutti tre fossero uguali, è certo, che due di essi dovranno sempre essere maggiori del rimanente; se poi ne sia uno maggiore di un altro, come $BAC > BAD$, si faccia l'angolo $BAE = BAD$, e prese le rette uguali $AD = AE$,

K 3

fi

si congiungano le rette BD , e BE , e questa venga con AC in C , e si congiunga CD . Essendo nel triangolo BDC , $BD + DC > BC$, e $BD = BE$, sarà $DC > CE$, dunque essendo i lati AD , AE uguali, ed AC comune alli triangoli DAC , CAE , dovrà essere l'angolo DAC maggiore di CAE ; dunque essendo $BAD = BAE$, sono li due $BAD + DAC$ maggiori dell'angolo BAC . Il che ec.

C O R O L L A R J.

FIG. 177. I. In ogni piramide, la di cui base sia, o un triangolo, o qualunque poligono $BDEFG$, gli angoli, che sono sopra la base, saranno maggiori degli angoli di esso poligono, cioè $ABD + ADE > BDE$, e parimente $ADE + AEF > DEF$, e così degli altri.

II. Preso nel piano della base qualunque punto C , ed indi tirate le rette agli angoli di essa, cioè CB , CD , CE , CF , CG , saranno tanti questi angoli de' triangoli descritti nella base, quanti sono gli angoli de' triangoli ABD , ADE , AEF , AFG , AGB dal vertice A della piramide inclinati ad essa base, essendo tanti questi triangoli, che quelli; dunque essendo maggiori gli angoli di questi triangoli verso la base, che gli angoli del poligono, gli altri angoli verso il vertice A dovranno essere minori degli angoli al vertice C di quei triangoli descritti sopra la base; dunque tutti gli angoli, che compongono un solido, sempre sono minori di quattro retti, essendo detti angoli raccolti in C uguali appunto a quattro retti.

FIG. 178. III. Avendo pure tre angoli HEG , GEF , FEL
mi-

minori di quattro retti, di cui due sian maggiori
 del rimanente, si può farne di tali angoli un angolo
 solido in questa maniera: Divise ugualmente le
 rette EH, EG, EF, EL , e condotte le linee $HG,$
 GF, FL , di esse facciafi un triangolo CBD . (il
 che può farfi, essendo due di tali linee maggiori
 dell'altra) perchè condotta ancora la FH , sono
 pure le due HG, GF maggiori di FH ; ma essen-
 do li due angoli $HEG + GEF$ maggiori dell'
 angolo FEL , la base $FH > FL$, dunque FG
 $+ GH > FL$) e circoscritto un cerchio al detto
 triangolo CBD , dal di cui centro O si tirino i rag-
 gi OB, OC, OD , questi saranno minori delle
 rette EH, EG, EF , perchè se gli fossero uguali,
 avendo le stesse basi, farebbero gli angoli $HEG,$
 GEF, FEL uguali agli angoli $BOD, DOC,$
 COB , li quali sono uguali a quattro retti; e se
 detti raggi fossero maggiori di quei lati EH &c.
 avrebbero in O gli angoli minori di quelli fatti
 in E , per essere il vertice O più lontano dalle
 basi, che il vertice E ; onde gli angoli proposti in E
 farebbero maggiori de' quattro retti, compresi in
 O . Essendo adunque OB minore di EH , si alzi
 dal punto O la retta OA perpendicolare al pia-
 no BCD , la quale porta un quadrato uguale all'
 eccesso del quadrato EH sopra il quadrato OB ;
 ed indi congiunte le rette AB, AD, AC , saran-
 no tutte a'dati lati EH, EG &c. uguali, essen-
 do il loro quadrato uguale alla somma del qua-
 drato AO , e del quadrato del raggio OB , ovve-
 ro OD , o pure OC ; onde sono tali rette uguali
 a' detti lati, e le basi parimente uguali; dunque
 gli angoli BAD, DAC, CAB uguagliano li tre

proposti *HEG, GEF, FEL*; e però ne riesce l'angolo solido in *A*, compreso dalli tre angoli dati.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 179. *Le rette AB, DC, che segano i piani paralleli PKQ, NGO, LIM, sono da essi proporzionalmente divise.*

Congiungasi la retta *AC*, e congiunte le rette *AD, EF, EH, CB* (supponendo, che *DC* segghi il piano di mezzo *NGO* in *F*, ed *AB* lo segghi in *H*,) farà pure *AD* parallela ad *EF*, e *BC* parallela ad *EH*, segandosi i piani paralleli dal piano del triangolo *DCA*, e da quello dell'altro triangolo *ABC*; dunque *DA* ad *FE* è come *DC* a *CF* :: *AC* a *CE*; ed ancora *BC* ad *HE*, come *CA* a *AE* :: *BA* a *AH*, e per conversione di ragione farà pure *AC* a *CE* :: *AB* a *BH*; dunque *DC* a *CF* :: *AB* a *BH*. Il che &c.

C O R O L L A R I.

FIG. 180. I. Nelle Piramidi, segandosi col piano *HIFG* parallelo alla base *BEDC* (o sia essa base triangolare, o quadrilatera, o poligona) farà la figura di tale sezione simile ad essa base; imperocchè i lati *AB, AE, AD, AC*, da essi piani paralleli sono divisi proporzionalmente, *BA* a *AH* :: *EA* a *AI* :: *DA* a *AF* :: *CA* a *AG*; dunque ancora sono proporzionali *BE* a *HI* :: *ED* a *IF* :: *DC* a *FG* :: *CB* a *GH*; e gli angoli pure *BED, HIF* sono uguali (pel Corollar. 4. della Propos. 3.) e così gli altri corrispondenti; dunque la sezione *HIFG* è simile alla base *BEDC*. II.

II. Così pure ne' prismi, e ne' parallelepipedì sono simili le sezioni parallele alla base, ma uguali ancora ad essa, avendo uguali i lati, che riescono opposti ne' parallelogrammi comprendenti il prisma, ed il parallelepipedo.

III. Ancora i Coni, ed i Cilindri hanno le sezioni, parallele alla loro base circolare, simili ad essa, le quali ne' cilindri sono ancora uguali, avendo essi circoli uguali diametri.

PROPOSIZIONE VI.

Il Prisma triangolare ABCFDE si divide in FIG. 181
tre piramidi uguali.

SI tirino le linee BD , BF , CD . La piramide $ABDC$ sarà uguale alla $BCDF$, avendo le basi uguali ADC , CDF , e l' istessa altezza al suo vertice comune B ; ma ancora $BCDF$ è uguale all' altra $BEDF$, avendo le basi uguali BCF , BEF colla stessa altezza al loro comune vertice D ; dunque è diviso il prisma in tre piramidi uguali.

COROLLARJ.

I. Qualsivoglia altro Prisma, o ancora parallelepipedo, sarà triplo della piramide fatta sopra la stessa base, e la medesima altezza. Perchè la base poligona può dividersi in alquanti triangoli, e così il prisma in altrettanti prismi triangolari; ed ancora la piramide, fatta sopra essa base, si divide in altrettante piramidi triangolari, che sono il terzo del prisma triangolare, eretto sopra lo stesso triangolo, alla medesima altezza;
Per

FIG. 182.

Per esempio la piramide $AHEG$ è la terza parte del prisma $ACBEHG$; e così ancora la piramide $AGEF$ è il terzo del prisma $BCIFEG$; e così degli altri; dunque la piramide $AGHEDF$ è un terzo del prisma $ACIKBEHGF$.

FIG. 183. II. Parimente il Cono sarà un terzo appunto del cilindro ugualmente alto sopra la medesima base circolare, perchè il prisma, e la piramide avendo per base un poligono regolare iscritto in un cerchio $EHDF$, moltiplicando in infinito i loro lati, degenera il poligono in un cerchio, onde il prisma riesce un cilindro, e la piramide un cono, e però mantenendosi sempre il prisma triplo della piramide sopra la medesima base, e nell' istessa altezza, ancora essendo ridotto il prisma in un cilindro, e la piramide in un cono, quello riesce triplo di questo.

FIG. 184.

PROPOSIZIONE VII.

I prismi ugualmente alti AE , HO , sono come le loro basi DFE , $QMNPO$, e così ancora le Piramidi in essi inscritte.

IMperocchè moltiplicando in qualche maniera la base DFE , ed alzandovi alla medesima altezza i lati paralleli ad AD , CF , BE , altrettanto moltiplice riuscirà questo prisma del prisma AE ; come è moltiplice la base di quello della base DFE , essendo ogni prisma di ugual base, e con la medesima altezza, uguale ad ogni altro: E similmente moltiplicando l' altra base $QMNOP$ in qualunque altra maniera, ed erette le linee alla medesima altezza, si farà pure un

un prisma ugualmente moltiplice di *HO*, come la sua base è fatta moltiplice di questa. Che se la moltiplice base del primo sarà uguale alla base moltiplice del secondo, ancora i prismi, o le piramidi moltiplicate faranno uguali; ma se la moltiplice base dell' uno fosse maggiore, o minore della moltiplice base dell' altro, ancora maggiore, o minore sarebbe il prisma di quello, del prisma di quest' altro, ed ancora la piramide dell' uno, maggiore, o minore sarebbe di quella dell' altro; dunque tanto i prismi, quanto le piramidi ugualmente alte sono proporzionali alle loro basi, mentre le basi, ed i prismi, o le piramidi ugualmente moltiplici del primo, si accordano in uguagliare, superare, o mancare da altre ugualmente moltiplici della base, e del prisma, o piramide, secondariamente fatte. Il che &c.

COROLLARI.

I. Ancora i cilindri, ed i conì ugualmente alti, sono come le loro basi, perchè se i circoli fossero doppj, o tripli &c. di esse basi, ancora i cilindri, ed i conì farebbero ugualmente moltiplici di esse basi, onde ne segue l'istesso.

II. Se i prismi, o i cilindri avessero basi uguali, ma diverse altezze, farebbero pure alle dette altezze proporzionali, perchè moltiplicata l'altezza di essi, ne riuscirebbero prismi, e cilindri ugualmente moltiplicati, li quali farebbero uguali, o disuguali, secondo che le loro altezze moltiplicate fossero uguali, o pure una maggiore dell' altra.

III.

III. Ancora le piramidi, ed i conì di uguale base, faranno come le loro altezze, essendo il triplo de' prismi fatti sopra la stessa base, ed alla medesima altezza,

PROPOSIZIONE VIII.

I Prismi DC, GN sono in ragione composta di quella delle basi, e di quella delle loro altezze, e così ancora le piramidi, i cilindri, ed i conì sono in ragione composta delle basi, e delle altezze.

FIG. 185.

Imperochè si faccia un prisma PV , la di cui base TSV sia uguale alla base ABC del prisma DC , e l' altezza PS sia uguale all' altezza GL dell' altro prisma GN , farà DC a GN in ragione composta di DC a PV , e di PV a GN ; ma DC a PV è in ragione dell' altezze, avendo le basi uguali, e PV a GN è in ragione delle basi, essendo ugualmente alti; dunque DC a GN è in ragione composta delle altezze, e delle basi loro; onde ancora le piramidi fatte sulle stesse basi, ed altezze de' Prismi, di cui sono il terzo, ed i cilindri, ed i conì similmente dovranno essere in ragione composta delle loro basi, e delle loro altezze. Il che &c.

COROLLARI.

I. Se però ne' prismi, o nelle piramidi, o ne' cilindri, o ne' conì fosse la base del primo a quella del secondo, come reciprocamente l' altezza del secondo all' altezza del primo, tali solidi saranno uguali, perchè la ragione composta della

della base dell' uno alla base dell' altro , e dell' altezza di quello all' altezza di questo , che è come la base di questo alla base di quello , è lo stesso , che ragione di ugualità , essendo la composta di quella base a questa , e di questa a quella , la stessa , che di quella base a se stessa .

II. E viceversa , se i prismi , o le piramidi , o i cilindri , o i coni sono uguali , dovranno avere le basi reciproche dell' altezze , perchè la ragione composta della base del primo a quella del secondo , e dell' altezza di quello all' altezza di questo , non farebbe ragione di ugualità , se non essendo quella base a questa , come vicendevolmente l' altezza di questo all' altezza di quello .

PROPOSIZIONE IX.

I coni , ed i cilindri simili ACE , BFH , sono in ragione tripla de' diametri delle loro basi CE , FH . FIG. 186.

Imperocchè questi solidi essendo simili , i loro alti AD , BG (quantunque fossero similmente inclinati , e non perpendicolari) sono come le loro altezze , e proporzionali a' diametri delle loro basi circolari ; ed esse basi , essendo cerchi , sono come i quadrati de' loro diametri ; pertanto esse basi sempre sono in ragione duplicata de' diametri ; ma il solido ACE al solido BFH è in ragione composta di quella delle basi , e di quella delle altezze ; dunque sono in ragione duplicata de' diametri , e in quella delle altezze ; però essendo queste ancora come i diametri , ne riesce ,
che

che siano in triplicata ragione di essi diametri; come dovea dimostrarfi.

C O R O L L A R J.

I. E' manifesto, che ancora questi simili cilindri, o conj faranno in tripla ragione di quella delle loro altezze, o de' loro lati omologj, li quali sono nella stessa ragione de' diametri delle loro basi.

II. Ancora i prismi simili, e le piramidi simili faranno in triplicata ragione de' loro lati omologhi, o delle loro altezze, o de' diametri delle loro basi, o de' cerchj circoscritti alle basi medesime, essendo pure i lati omologhi, o i diametri delle basi, come le loro altezze, e le basi simili in duplicata ragione di detti lati; onde la ragione composta della proporzione delle basi, e di quella delle altezze, o de' lati omologhi, riesce triplicata di quella di essi lati, o de' loro diametri.

III. Similmente altri simili corpi regolari, o irregolari faranno in ragione triplicata de' loro lati omologhi, o de' loro assi, potendosi dividere in altrettante simili piramidi tanto l' uno, che l' altro, ciascuna delle quali alla sua corrispondente è in triplicata ragione di quella de' loro lati omologhi.

FIG. 187. IV. Quindi, essendo quattro rette A, B, C, D continuamente proporzionali, qualunque solido si faccia sopra il primo lato A ed un altro simile sopra il lato B , sarà il solido primo al secondo, come la prima retta A alla quarta D , avendo quella a questa triplicata ragione di A a B .
PRO-

PROPOSIZIONE X.

Essendo continuamente proporzionali tre linee rette R, S, T, fatto con le medesime un parallelepipedo ABHF, ed un altro MNOQ con tutti i lati uguali alla retta mezzana S, e con uguali angoli solidi nell' uno, e nell' altro, saranno ambidue tra di loro uguali.

FIG. 188.

Imperochè essendo $AB : QK :: KL : BC$, le basi ABC , QKL faranno uguali; ed essendo ancora $BH = KN$, le loro altezze faranno pure uguali; dunque essi solidi sono uguali.

COROLLARIO.

I. Similmente fatti i prismi $FEABH$, $POQKN$, essendo nel primo le tre linee AB , AE , AD uguali alle tre R , S , T ; e nell' altro le linee QK , QO , QI uguali alla media S , ma con angoli solidi uguali, saranno pure essi prismi tra loro uguali, come sono uguali que' parallelepipedi, dupli di essi prismi; ed ancora chi facesse le piramidi $AEBD$, $QOIK$ con le stesse linee, faranno pure esse piramidi uguali, come sono uguali detti prismi tripli di esse:

II. Facendo pure due cilindri $ABCD$, $EFGH$, ne' quali il diametro del primo BC al diametro del secondo FG sia come la prima R alla seconda S , o come S a T , ma l' altezza del secondo a quella del primo, come la prima R alla terza T , faranno essi cilindri uguali, perchè essendo il cerchio del primo a quello del secondo, come il quadrato di BC al quadrato di FG , e tanto il quad-

FIG. 189.

quadrato di R al quadrato S , quanto il quadrato S al quadrato T , essendo come R a T , cioè come reciprocamente è l'altezza HG all'altezza DC , perciò avendo essi cilindri le basi reciproche all'altezze, devono essere uguali.

III. Similmente i coni, che si facessero colle dette basi, e con l'altezze medesime, faranno uguali, come lo sono i cilindri tripli di essi coni.

PROPOSIZIONE XI.

Girando il semicircolo EBR, ed il rettangolo circoscrittogli EFQR, intorno al diametro ER, ne nasce la sfera dal semicircolo, ed il cilindro circoscrittogli dal detto rettangolo; e sarà l'eccesso del cilindro sopra la sfera uguale al cono, che è tra la stessa base circolare, e la medesima altezza.

Tirate al centro le rette FC , DC , s'intenda fatto con la rivoluzione del triangolo FEC circa EC il cono $DVFTC$; questo si mostrerà essere uguale all'eccesso del semicilindro $DTFUBYA$ sopra l'emisfero $BYANEOB$; imperocchè tagliando questi solidi con un piano parallelo al cerchio $DTFV$ per la retta GH parallela a DF , segante l'emisfero ne' punti N , O , ed i lati del cono in L , M ; congiunto il raggio CO , farà $CO^2 = IH^2$; ed è $CO^2 = CI^2 + IO^2$, e l'altro $IH^2 = IO^2 + GOH$; dunque $CI^2 = GOH$; ed è $CI^2 = IM^2$ (come $CE = EF$, e $CI = IM$) dunque $IM^2 = GOH = IH^2 - IO^2$, però il cerchio del raggio IM , dentro il cono $DVFTC$, è uguale all'eccesso del cerchio, che è nel cilindro col raggio IH , sopra il cerchio dell'emisfero,

col

col raggio IO , essendo questi cerchj, come que' quadrati; dunque essendo qualunque cerchio di quel cono uguale all' eccello de' cerchj del cilindro $DTFBYA$, farà esso cono uguale all' eccello di esso cilindro sopra l' emisfero; e similmente l' eccello dell' altro cilindro $AYBQXPS$ sopra il rimanente emisfero $AYBR$ farà uguale all' altro cono $CQSPX$; dunque l' eccello di tutto il cilindro $FQSPD$ circoscritto alla sfera, sopra la detta sfera $EBYAR$ è uguale alli due coni fatti colla medesima base circolare coll' altezza del raggio, li quali uguagliano il cono della medesima base, con l' altezza di tutto il diametro doppio del raggio; però il detto eccello del cilindro sopra la sfera inscrittagli è uguale al cono $EPSQX$, che ha la stessa base circolare $PSQX$, e l' altezza AE diametro della sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Dunque il detto eccello del cilindro sopra la sfera è un terzo di esso cilindro, essendo pure il detto cono un terzo del medesimo:

II. E però il cilindro alla sfera inscritta è in ragione sesquilatera, cioè come 3. a 2.

III. In un emisfero $AYBR$ inscritto un cono RYA , che ha la medesima base circolare, e la stessa altezza CR , esso emisfero farà doppio di esso cono, essendo pure questo uguale all' altro $CPSQX$, ed in somma un terzo del cilindro circoscritto all' emisfero, di cui è sesquilatero.

IV. Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri, essendo proporzionali a' loro circo-

L

scritti

scritti cilindri, i quali sono simili, e però sono in triplicata ragione de' loro assi, o diametri.

P R O P O S I Z I O N E XII.

TAV. XIV.
FIG. 191.

Nella sfera non solamente sono cerchj i piani, che fanno le ordinate del semicerchio, dalla cui rivoluzione intorno al diametro si genera essa sfera; ma qualsivoglia piano D E B, che seghi essa sfera, ne fa nascere pure un circolo DEBG.

Imperochè dal centro *C* di essa sfera tirata la *CA* perpendicolare sopra quel piano, e congiunte al perimetro di tale sezione le rette *AD*, *AE*, *AB*, indi tirati i raggi *CD*, *CE*, *CB*, che sono uguali, i loro quadrati faranno pure uguali; ma $CD^2 = CA^2 + AD^2$; e $CB^2 = CA^2 + AB^2$ e $CE^2 = CA^2 + AE^2$, e così sempre; dunque ancora $AD^2 = AB^2 = AE^2$, mentre collo stesso quadrato della perpendicolare *CA* uguagliano il quadrato del raggio della sfera; però tutte le rette *AD*, *AB*, *AE* &c. essendo uguali, bisogna che questa sezione *DEBG* sia un cerchio, il di cui centro *A*; dunque tutti i piani, che segano la sfera riescono cerchj. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Quindi dal centro di qualsivoglia sezione circolare della sfera, eretta la perpendicolare *AC*, passa per lo centro *C* di essa sfera: siccome tirata dal centro della sfera sopra qualunque piano, che la seghi, la perpendicolare *CA*, passa per lo centro di tale sezione circolare.

FIG. 192.

II. Similmente, per trovare il centro della sfe-

ra

ra, da due fezioni di piani circolari DE, GF , non parallele tra loro, tirate dal centro A , e dal centro B di esse le perpendicolari AC, BC , convenienti in C , farà esso C il centro di essa sfera, perchè tutte e' due queste perpendicolari passano per lo centro della sfera.

III. Se tali cerchj sono uguali, essendo il raggio AE del primo uguale al raggio BF del secondo, faranno essi ugualmente distanti dal centro C della sfera, perchè essendo i quadrati de' raggi CE, CF uguali, sono ancora $AE^2 + AC^2 = BF^2 + BC^2$, e però essendo $AE^2 = BF^2$, ancora $AC^2 = BC^2$. Ma se fosse uno GF minore dell' altro DE , farebbe questo più lontano, che quello dal centro C della sfera; mentre essendo $BF^2 + BC^2 = AE^2 + AC^2$, e $BF^2 < AE^2$, farà $BC^2 > AC^2$, e così è maggiore la distanza BC della distanza AC .

PROPOSIZIONE XIII.

Descrivere nella sfera, il di cui diametro GH , FIG. 193. una piramide equilatera, ed equiangola, che è un solido regolare, il quale diceſi Tetraedro.

SI pigli del diametro GH la terza parte HA , e per lo punto A si ſeghi la sfera con un piano, cui ſia perpendicolare GA , onde ne riefca il cerchio $FBED$, il di cui diametro FE , il centro A ; e diviſo il raggio AF per mezzo in I , ſe gli conduca la perpendicolare BID ; indi ſi tirino le rette BE, DE, BG, DG, EG . Sarà il ſolido $GDBE$ la Piramide equilatera ricercata; imperocchè congiunta la FD farà uguale al raggio

AD, onde il triangolo *FAD* sarà equilatero, e l'angolo *FAD* farà la terza parte di due retti, onde l'arco *FD* sarà la terza parte della femiperiferia *FDE*, onde *BFD* è la terza parte di tutta la circonferenza *FBED*; e similmente *BE*, *ED* ne sono le altre due terze parti; dunque il triangolo *BED* è equilatero; ed è il quadrato *BE* triplo del quadrato *AE*, essendo $BE^2 \cdot EF^2 :: IE \cdot EF :: 3 \cdot 4$, ed $EF^2 \cdot AE^2 :: 4 \cdot 1$, dunque $BE^2 \cdot AE^2 :: 3 \cdot 1$; ed ancora GE^2 ad AE^2 è come *HGA* ad *HAG*, cioè $:: HG \cdot HA :: 3 \cdot 1$; dunque ancora $BE^2 = GE^2$; e così tutti gli altri lati *GB*, *GD* faranno uguali a *GE* (essendo i loro quadrati uguali al quadrato della perpendicolare *GA*, e al quadrato de' raggi *AB*, *AD*, *AE* tra loro uguali) però sono essi pure uguali agli altri lati *BE*, *BD*, *DE*; dunque tutti i lati di essa piramide sono uguali, onde è composta di quattro triangoli equilateri; ed è un solido da lati uguali, e da angoli uguali compreso; però esso *GDBE* è il Tetraedro, che volevasi inscrivere nella sfera.

C O R O L L A R J.

I. Il quadrato di ciascun lato *GE* della Piramide al quadrato del diametro della sfera *GH* sta come *AG* . *AH* $:: 2 \cdot 3$.

II. Il quadrato del raggio della sfera *CG* al quadrato del lato *GE* della Piramide, è come 3 . 8; perchè il quadrato del raggio essendo un quarto del quadrato del diametro, $CG^2 \cdot GH^2 :: 1 \cdot 4 :: 3 \cdot 12$; ma $GH^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 2 :: 12 \cdot 8$; dunque $CG^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 8$.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

Nella sfera, il di cui diametro GH, inscrivere un FIG. 194.
cubo, cioè un solido regolare, da sei quadrati u-
guali compreso.

SI pigli AH uguale a un terzo del diametro GH , come si è fatto nella precedente, e gli si ponga AE perpendicolare, conveniente colla circonferenza del cerchio in E , e si congiungano GE , EH , e si compisca il rettangolo $GEHB$ inscritto al medesimo cerchio. Poscia per le rette GE , BH si tirino due piani perpendicolari al piano del detto rettangolo, i quali faranno due cerchj paralleli $EKGI$, $HFBD$; ne' quali essendo i diametri EG , HB uguali, tirate in essi per i loro centri N , C le rette KN , DC ad angolo retto a' detti diametri, e congiunte le rette EI , IG , GK , KE nell' uno, ed HD , DB , BF , FH nell' altro, faranno questi due quadrati uguali, in detti circoli inscritti; e congiunte ancora le rette ID , KF , faranno pure parallele alle altre EH , GB , congiungendo que' lati uguali de' quadrati paralleli, e faranno altri quadrati uguali a quelli; imperocchè siccome il quadrato GE è duplo del quadrato EK , ed è quel medesimo duplo del quadrato EH , essendo $GE^2 \cdot EH^2 :: GA \cdot AH :: 2 \cdot 1$. dunque $EK = EH$, e così tutte l' altre linee, che fanno i lati del solido $EKGIDBFH$, essendo uguali, e ad angoli retti, rimane evidente essere questo un cubo di sei quadrati $EKGI$, $BFHD$, $EKFH$, $KFBG$, $GIDB$, $IDHE$, inscritto nella data sfera. Il che &c.

L 3

Co-

C O R O L L A R J.

I. Il quadrato del diametro GH della sfera è triplo del quadrato di ciascun lato del cubo inscrittovi, perchè $GH^2 \cdot EH^2 :: GH \cdot HA :: 3 \cdot 1$.

II. Essendo il lato della Piramide $= GE$, il quadrato di esso al quadrato del lato del cubo è come $2 \cdot 1$; essendo $EG^2 \cdot GK^2 :: EG \cdot GN$.

III. Essendo il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato della piramide, come 3 a 8 ; ed il quadrato di esso lato piramidale al quadrato del cubo inscritto nella medesima sfera in ragione dupla, come 8 a 4 ; perciò il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato del cubo inscrittovi è come 3 a 4 .

P R O P O S I Z I O N E X V.

Nella sfera inscrivere un solido regolare, compreso da otto triangoli equilateri, che dicesiottaedro.

FIG. 195. **S**I feghi per lo centro A essa sfera con due piani $HEGD$, $CEBD$, l'uno all' altro perpendicolare, che converranno insieme nel loro comune diametro ED , e condotti gli altri diametri GH , BC perpendicolari al suddetto, e tra loro ancora; si congiungano le rette GE , GD , DH , HE , EB , BD , DC , CE , che tutte faranno tra loro uguali, essendo i lati de' quadrati $GEHD$, $CEBD$, inscritti in questi uguali cerchj; è manifesto, che il solido sarà compreso da questi otto triangoli equilateri, GEB , GEC , GCD , GDB , HEB , HEC , HCD , HDB ; e però esso

fo farà l'Ottaedro equilatero inscritto nella sfera. Il che &c.

COROLLARI.

I. Il quadrato del diametro CB della sfera è duplo del quadrato del lato GB di questo solido regolare interpostovi.

II. Ezzo quadrato del lato di questo Ottaedro al quadrato del lato della Piramide inscritta nella stessa sfera farà come 3. a 4, essendo il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del diametro della sfera come 1. a 2., cioè come 3. a 6; e il quadrato di detto diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide, come 3. a 2, cioè come 6 a 4.

III. Il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del lato del cubo inscritto alla detta sfera è come 3. a 2, essendo quello al quadrato del diametro, come 1. a 2, ed ezzo quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3. ad 1.

IV. Ma ancora il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide è come 3. a 2; dunque il diametro della sfera al lato della piramide è come il lato dell' ottaedro al lato del cubo.

PROPOSIZIONE XVI.

FIG. 196.

Nella data sfera inscrivere un corpo regolare, che dicesi Dodecaedro, da dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli compreso.

L 4

Sia

Sia il cubo $ADCGB$ in essa sfera descritto, i cui lati BC, CD, AD si dividano pel mezzo ne' punti L, H, F , e si compiscano i quadrati $LCHN, NHDK, DFIH$, e divisi i lati LN, NK, HI nell'estrema, e media ragione, siano i maggiori segmenti NP, NO, IQ , ed a questi si alzino uguali le rette PS, NV, OR perpendicolari al piano del quadrato $BCDE$, le quali faranno parallele, convenienti in una retta SVR parallela a PO , e per il punto Q nel piano NHI , si conduca ZQ parallela ad NH , e congiunta la VH , concorra con ZQ in T ; indi si tirino le linee CT, DT, DR, CS ; nel piano delle parallele CD, SR ne riuscirà il pentagono $CSRDT$ regolare, li cui angoli uguali faranno ugualmente distanti dal centro X della sfera, e del cubo, il quale centro è nella retta VNZ prolungata fino al lato IX del quadrato, che può farsi $NHIX$, sopra tali linee, che sono la metà de' lati del cubo, onde il punto X riesce nel mezzo.

Tirate le rette CP, DO, DQ, CQ , è chiaro essere queste uguali, essendo basi di triangoli rettangoli, i di cui lati maggiori sono la metà del lato del cubo, cioè CL, DK, DH, CH , ed i lati minori PL, KO, HQ sono pure la porzione minore dell'estrema, e media ragione di esse LN, NK, IH , ciascuna uguale alla metà del lato del cubo, e però tutti essi lati sono uguali; ed il quadrato CP essendo triplo del quadrato PN , perchè $CL^2 + LP^2 = NL^2 + LP^2 = NP^2 + 2NPL + 2LP^2 = NLP + 2NLP = 3NLP = 3PN^2$; ed aggiunto il quadrato $PS^2 = PN^2$, farà $CP^2 + PS^2$

$\rightarrow PS^2 = CS^2 = 4PN^2 = 4VS^2 = SR^2$; dunque $CS = SR$; e così ancora DR , il di cui quadrato $= DO^2 \rightarrow OR^2$, farà uguale ad SR ; ed essendo ancora $QT = VN$, perchè $NH \cdot VN :: QT \cdot QH$, ed è $NH \cdot VN (LN \cdot NP :: NP \cdot PL) :: VN \cdot QH$; dunque $QT = VN$, e però ancora $DT^2 = DQ^2 \rightarrow QT^2 = 4PN^2$; e così ancora CT , e TD sono uguali a CS , ad SR , a DR ; onde questo pentagono $SRDTC$ è equilatero.

Che sia poi ancora equiangolo, tiratavi la retta CR , si mostrerà, essere questa $= CD$; imperocchè essendo $NO = NP$ (per il Coroll. 6. della Proposiz. 5. della parte seconda) farà pure $LO \cdot LN :: LN \cdot NO$; dunque $LO^2 \rightarrow ON^2 = 3LN^2$; ed essendo $OR = ON$, faranno $LO^2 \rightarrow OR^2 = 3NL^2$, ed aggiuntovi $CL^2 = NL^2$, i quadrati $LO^2 \rightarrow OR^2 \rightarrow CL^2 = 4NL^2 = CD^2$; ma congiunta CO , farà $CO^2 = LO^2 \rightarrow CL^2$, dunque $CO^2 \rightarrow OR^2$, cioè $CR^2 = CD^2$; onde l'angolo $CSR = CTD$, avendo uguali i lati, e la base $CR = CD$; e così pure dimostrerassi ancora l'angolo SRD uguale a gli altri, e l'angolo RDT con l'altro TCS può dimostrarsi pure uguale a quelli, perchè condotta la TR , siccome $VN = PN$, ed $NZ = HQ = PL$, la $VZ = NL$; e la $ZQ = NH = NL$, e $QT = VN = NO$, dunque $ZT = LO$; onde $VZ^2 \rightarrow ZT^2 = VT^2 = NL^2 \rightarrow LO^2 = CL^2 \rightarrow LO^2 = CO^2$; ed essendo ancora $VR^2 = OR^2$, li quadrati $VT^2 \rightarrow VR^2 = TR^2 = CO^2 \rightarrow OR^2 = CR^2$; onde ancora la $TR = CR$, ed i lati RD , e DT uguali a' lati RS , CS ; però l'angolo $RDT = RSC$;
cd

ed ancora TCS si mostra uguale agli altri; però esso pentagono è ancora equiangolo.

Ed essendo $NX = HI = LN$, ed $NV = NO$, farà $XV = LO$, ed $VR = NO$, dunque $LO^2 + ON^2$, che è uguale al triplo di LN , ed ancora $XV^2 + VR^2$, cioè il quadrato della linea, che si conduceffe da X ad R , farà il triplo del quadrato LN ; ed ancora essendo $ZT = LO$, ed $XZ = PN = NO$, sono pure li quadrati $ZT^2 + XZ^2 = LO^2 + NO^2 = 3LN^2$; e tale farebbe il quadrato della retta condotta da X a T , dunque farà uguale alla condotta da X a R , e da X a S , e però tutti uguali al raggio della sfera, che viene da X agli angoli del cubo, cioè a D , ed a C , perchè essendo il quadrato del diametro della sfera triplo del quadrato del lato cubico, ancora il quadrato del semidiametro, cioè del raggio della sfera è triplo del quadrato di LN , che è la metà di LK , o di CD , lato del cubo; sicchè tutti gli angoli del pentagono $CTDRS$ sono nella superficie della sfera, essendo ugualmente lontani dal centro X di essa. Il che riuscendo, in tutte l'altre parti descritto il pentagono, è chiaro, che faranno dodici, e però sarà fatto il dodecaedro regolare inscritto nella sfera. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Il lato del dodecaedro è la porzione maggiore del lato cubico diviso per estrema, e media ragione, perchè siccome $SV = PN$, che è la parte maggiore di NL divisa in detta estrema, e media ragione, così il duplo di quello, che è SR , deve essere la maggior porzione di LK , o
 CD

CD , dupla di NL , divisa similmente in estrema, e media ragione.

II. Quindi il quadrato del lato cubico al quadrato del lato del dodecaedro è come una linea alla minore porzione di essa, divisa con estrema, e media ragione, essendo quella a questa come il quadrato di tutta al quadrato della maggiore porzione.

III. Il quadrato del diametro della sfera essendo triplo del quadrato del lato cubico, farà al quadrato del lato del dodecaedro come una linea alla terza parte della sua minor porzione, con cui sia divisa per estrema, e media ragione.

IV. Essendo il quadrato del lato della piramide duplo del quadrato del lato cubico, farà esso quadrato del lato piramidale al quadrato del lato del dodecaedro come una linea retta alla metà della minore porzione di essa, divisa secondo la ragione media, ed estrema.

V. E perchè il quadrato del lato dell'ottaedro al quadrato del lato cubico è come 3. a 2.; perciò esso quadrato del lato di un ottaedro al quadrato del lato del dodecaedro è come una retta a due terzi della minore porzione della stessa sua ragione estrema, e media, con cui può essere divisa.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 197.

Il quadrato del lato AD d'un pentagono, inscritto in un cerchio, è uguale al quadrato del raggio di esso CD , col quadrato del lato AE d'un decagono inscritto nel medesimo cerchio, che divide per mezzo gli archi, cui si sottopongono i lati del pentagono.

Con-

Congiunto il raggio CE , che divide per mezzo l'angolo DCA , dividasi ancora l'angolo ACE per mezzo colla retta CL ; essendo adunque l'arco MD doppio di ED , e l'arco $MN (= AE)$ doppio di EL , farà l'arco NMD doppio di DL , onde l'angolo NCD , che è il doppio di CAD , farà pure doppio di DCH ; dunque gli angoli CAD , e DCH sono uguali; e però i triangoli ACD , CDH , che hanno l'angolo comune in D , sono simili; onde $AD \cdot DC :: DC \cdot DH$; e però $DC^2 = ADH$; e congiunta la retta EH , e tirata la DE conveniente con CA in B , farà $EH = HA$, essendo basi de' triangoli CEH , CAH , che intorno agli angoli uguali in C vi è il lato comune CH , ed il raggio $CE = CA$; dunque essendo ancora $DE = EA$, l'angolo $HEA = HAE = ADE$, però sono simili pure i triangoli ADE , ed EAH , onde $AD \cdot AE :: AE \cdot AH$, ed il quadrato $AE^2 = DAH$; dunque $DC^2 + AE^2 = ADH + DAH = AD^2$; onde il quadrato del lato del pentagono è uguale al quadrato del raggio col quadrato del decagono. Il che &c.

C O R O L L A R J.

I. Tirate le linee DO , AO , farà l'angolo $DOA = ECA$, essendo l'uno, e l'altro doppio di EOA , e siccome gli angoli sopra la base del triangolo isoscele DOA , cioè ODA , ed OAD sono doppj dell'angolo verticale DOA ; così ancora nel triangolo isoscele ECA gli angoli CAE , e CEA sono ciascuno di essi il doppio dell'angolo ACE ; dunque essendo $DEC = CEA$, farà $DEC = 2 ACE$; ed è $= ACE + EBA$, dunque bisogna, che sia
 ACE

$ACE = EBA$; e però i lati CE , ed EB sono uguali; sicchè BE è uguale al raggio del cerchio CE .

II. Similmente, essendo $CAE = 2 ACE = 2 ABE$; ed uguale agli angoli $ABE + AEB$; dunque $ABE = AEB$, ed il lato $AB = AE = ED$; onde ancora $CB = DB$, essendo questo, e quello uguali alla somma di un raggio circolare, e di un lato del decagono.

III. Quindi li triangoli CEB , BAE sono simili, essendo l'angolo $AEB = ECB$, e l'angolo B comune; dunque $CB : BE :: BE : AB$, e $CBA = BE^2 =$ al quadrato del raggio $CA^2 = BE^2$; onde la retta composta insieme col raggio circolare, e col lato del decagono, come sono DB , e CB , essendo $CBA = CA^2$, e $BDE = BE^2$, è divisa in estrema, e media ragione; e così vicendevolmente, se una retta si divide in estrema, e media ragione, il maggior segmento può prenderfi per raggio d'un cerchio, e farà il segmento minore uguale al lato d'un decagono da iscriversi nel medesimo cerchio.

PROPOSIZIONE XVIII.

Descrivere nella sfera un solido regolare composto da venti triangoli equilateri, il quale dicesi Icosaedro.

FIG. 198.

PER lo centro C della sfera fatto il cerchio BGD , tirato il diametro BCE , e postagli perpendicolare la retta $BN = BE$, si tiri la retta CN , segante la periferia in A , e D , quindi tirate le perpendicolari al diametro AFS , e DRG , si facciano passare per esse due piani perpendicolari
al

al medesimo cerchio, che faranno li cerchj $AOSL$, $DHGM$, ed in essi descrivansi dal punto A , e dal punto D li pentagoni $AOPQL$, $DIHKM$, ed a tutti i loro angoli si connettano le rette AH , HO , OI , IP , PD , DQ , QM , ML , LK , KA ; ed a' termini B , E del diametro si congiungano pure le rette AB , OB , PB , QB , LB , e le rette ED , EI , EH , EK , EM . Quindi ne risulterà il solido regolare da venti triangoli equilateri uguali compreso; Imperocchè essendo BN dupla del raggio BC , sarà pure AF dupla di CF , e però $= RF$, e congiunta AG , sarà $AFRG$ un quadrato; e tirate le GH , GK , che sarebbero lati del decagono inscritto nel cerchio $DHGM$, essendo $AK^2 = AG^2 + GK^2$, ed ancora $AH^2 = AG^2 + GH^2$, ma GH , GK , sono uguali, adunque $AK = AH$, ed AG è uguale al raggio GR , il di cui quadrato col quadrato del lato del decagono uguaglia il quadrato del lato del pentagono inscritto (per la prop. 17.) ne segue, che tanto AK , che $AH = KH$, onde AHK è un triangolo equilatero, e così gli altri interposti fra questi due cerchj faranno pure triangoli di lati uguali; ed essendo $AF^2 = EFB = RBF = RF^2$, la RB è divisa in F con estrema, e media ragione, onde per il Coroll. 3. della Prop. 17. essendo $RF = AF$ raggio del cerchio $AOSL$, deve essere FB uguale al lato di un decagono da inscrivere in esso cerchio; dunque AB è pure uguale al lato dell' inscritto pentagono AO , essendo tanto AO^2 , che $AB^2 = AF^2 + FB^2$, e così tutte l' altre rette OB , PB &c. faranno uguali a' detti lati del Pentagono; e similmente dall' altra parte le rette ED , EI &c. uguagliano ciascun lato

to DI, IH &c. dunque è ancora vero, che questi termini sono triangoli equilateri, uguali tra loro, e con ciascuno di quelli intercetti fra li due cerchj; però riesce in tal maniera fatto l'Icosaedro contenuto da venti triangoli uguali tra loro, ed equilateri. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato della sfera al quadrato del lato dell'Icosaedro, cioè AD^2 ad AB^2 , sta come cinque con la radice di cinque, a due, cioè :: $5 + \sqrt{5} : 2$, o pure :: $10 : 5 - \sqrt{5}$ (perchè il prodotto dell'estreme $25 + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5 = 20$, che è il prodotto delle medie) Il che si pruova, perchè essendo AF doppia di FC , sarà $AF^2 = 4FC^2$, e però $AC^2 : CF^2 :: 5 : 1$, e così ancora $AD^2 : AG^2$; ed $AG^2 : GH^2 :: 1 : 3 - \sqrt{5}$,

(essendo $AG + GH$ la somma del raggio del cerchio GHD , e del lato del decagono inscritto in esso, come una retta divisa in estrema, è media ragione; onde facendo essa somma = x , ed

$AG = 1$, sarà $GH = x - 1 = \frac{1}{x}$ dunque $xx - x = 1$, ed aggiunto $\frac{1}{4}$ di quà, e di là, riesce

$xx - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, e presane la radice $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ onde $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ però

$GH = x - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; onde il suo quadrato $GH^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}$

$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

=

$$\begin{aligned}
&= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 3 \frac{-\sqrt{5}}{2} \Big) \text{ ed aggiuntovi } AG^2 \\
&= 1, \text{ ne riefce } AG^2 + GH^2 = 1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{2 + 3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = AH^2 = AB^2, \\
&\text{dunque } AD^2 : AB^2 :: 5 : \frac{5 - \sqrt{5}}{2} :: 10 : 5 \\
&\quad - \sqrt{5} :: 5 + \sqrt{5} : 2.
\end{aligned}$$

II. Il quadrato del lato della Piramide essendo al quadrato del diametro della sfera come 2. a 3; e di questo diametro il quadrato, a quello del lato dell' Icosaedro, essendo, come $5 + \sqrt{5}$ a 2: dovrà per analogia perturbata essere il quadrato del lato della Piramide al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 3.

III. Essendo poi il quadrato del lato del cubo al quadrato del lato della piramide, come 1. a 2, cioè come 3 a 6 e il quadrato di questo al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 3, farà il quadrato del lato del cubo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6.

IV. E perchè il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato Cubico è come 3 a 2, cioè come 6 a 4, e questo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6, farà pure il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 4.

V. Il quadrato del lato del Dodecaedro al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$ a 2; imperocchè il quadrato del lato dell' ottaedro, al quadrato del lato del dodecaedro è come una
retta

retta a due terzi della minor porzione, con cui
 sia divisa secondo l'estrema, e media ragione;
 cioè come 2 a $2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (perchè se una li-
 nea si fa $= 2$, divisa in detta estrema, e me-
 dia ragione, ha la porzione maggiore $= \sqrt{5} - 1$,
 onde la rimanente minor porzione $= 2 - \sqrt{5}$
 $+ 1 = 3 - \sqrt{5}$, onde li suoi due terzi sono
 $= 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$) ed il quadrato del lato dell'Ico-
 faedro al quadrato del lato dell'ottaedro è come 4.
 a $5 + \sqrt{5}$; dunque il quadrato del lato dell'Ico-
 faedro al quadrato del lato del dodecaedro è in
 ragione composta di 2. a $2 - \frac{2}{3}$, e di 4. a 5
 $+ \sqrt{5}$, delle quali risulta la ragione di 8. 10
 $+ 2\sqrt{5} = \frac{10\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{3}$ cioè di 8. a $\frac{10}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$,
 o come 2 a $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$; dunque convertendo, il
 quadrato del lato del dodecaedro al quadrato del
 lato dell'Icofaedro è come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$ a 2.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 199.

*In un cerchio BDK, che sia uguale al maggio-
 re di una sfera, descrivere tutti i lati de' cinque
 solidi regolari, che in essa sfera possono inscri-
 verfi.*

Si tiri il diametro BCE, e dal centro C si alzi
 perpendicolare il raggio CK, cui si tiri pa-
 rallela BN = BE, ed al centro C congiunta la
 NC, che seghi la periferia ne' punti A, D, si

M
con-

conduca pure la AF perpendicolare al diametro, e presa la BL uguale alla terza parte del diametro, si alzi pure la perpendicolare LH , segante CN in I , e dal punto I si tiri IG perpendicolare alla AD ; poscia si congiungano le rette EH , HB , EK , AG , ed AB , queste faranno i lati di detti solidi regolari, che in detta sfera possono iscriversi. Imperocchè, essendo il quadrato del diametro della sfera BE al quadrato del lato della Piramide come 3 a 2, cioè come BE ad EL , nella qual proporzione è il quadrato di BE al quadrato di EH , però il lato della Piramide sarà uguale alla retta EH .

Ed essendo il quadrato del diametro BE al quadrato del lato del cubo, come $3 \cdot 1 :: EB \cdot BL :: BE^2 \cdot BH^2$, bisogna pure sia BH il lato del cubo.

Ma il quadrato del diametro BE al quadrato del lato dell'ottagono è come $2 \cdot 1 :: BE \cdot EC :: BE^2 \cdot EK^2$; dunque EK è il lato dell'ottaedro.

E perchè il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del dodecaedro è come

2. ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$, farà AG il lato del dodecaedro,

perchè essendo BN dupla di BC , però $BN^2 = 4 BC^2$, onde $BN^2 - BC^2 = 3 BC^2 = CN^2$ ficchè posta $BC = 1$, la $CN = \sqrt{5}$, ed essendo $BL = \frac{1}{3} BE = \frac{2}{3} BC$, la $CL = \frac{1}{3} CB$, e la $CI = \frac{1}{3} CN = \frac{\sqrt{5}}{3}$, onde $CA = BC = 1$,

$= 1$, la $CA - CI = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3} = AI$, però

$DA = 2$, ad AI , è come 2 ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$; ed essendo DA un diametro $= EB$, ed ancora $DA^2 \cdot AG^2 :: DA \cdot AI$, perciò AG è il lato del dodecaedro, essendo il quadrato del diametro della sfera AD al quadrato di AG , come 2. ad 1.
 $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Il lato poscia dell'Icofaedro è AB , come apparisce dalla costruzione della precedente proposizione; però le rette EH, BH, EK, AG, AB , sono i lati de' cinque solidi regolari, che possono inscriverti in detta sfera. Il che &c.

COROLLARI.

I. Il lato della Piramide EH è il maggiore di tutti, ed il lato AG del dodecaedro è il minimo di ciascuno.

II. Il lato dell'ottaedro EK è maggiore del lato BH del cubo, e questo è pur maggiore del lato AB dell'Icofaedro.

III. I quadrati del lato della Piramide EH , e del lato BH del cubo, presi insieme, sono uguali al quadrato del diametro BE della sfera.

PROPOSIZIONE XX.

Niuno altro solido regolare può averfi, oltre li cinque addotti per inscriverti nella sfera.

Imperochè l'angolo solido deve essere costituito almeno con tre angoli piani, o con più di
 M 2 effi

effi, ma però minori di quattro retti; dunque l'angolo de' triangoli equilateri essendo uguale a due terzi di un retto, non possono fare un angolo solido se non tre di effi, come nella Piramide; o quattro de' medesimi, come nell'ottaedro, o al più cinque, come nell'Icosaedro; ma non già sei di effi, che farebbero quattro retti. L'angolo de' quadrati essendo retto, solamente tre di effi possono fare l'angolo solido nel cubo, perchè quattro farebbero uguali a quattro retti. L'angolo del Pentagono essendo uguale ad un retto con la quinta parte di esso, possono solamente tre di tali angoli fare l'angolo solido del dodecaedro, e non quattro di effi, che farebbero maggiori di quattro retti; perciò solamente questi cinque solidi regolari possono riuscirne. Il che dovea dimostrarfi.

C O R O L L A R J.

I. Non possono però farsi solidi regolari di altri piani compresi da maggior numero di lati uguali, ed uguali angoli, perchè l'esagono ha l'angolo uguale ad un terzo di quattro retti; onde tre angoli dell'esagono equivagliano a quattro retti, e però non possono fare un solido; e gli altri piani regolari di maggior numero di lati avendo l'angolo maggiore di quello dell'esagono, molto meno possono fare l'angolo solido.

II. Si potrebbero inscrivere però nella sfera altri solidi, ma irregolari, o compresi da figure tutte diverse, o da alcune uguali, e tra se simili, ma da altre di sorte diversa uguali, e simili tra di se: Per esempio, si potrebbe in due
pa-

paralleli, ed uguali circoli della sfera descriverci due simili poligoni regolari, di qualunque numero di lati; e da qualsivoglia angolo dell'uno tirate le rette a' termini di qualunque lato dell'altro poligono contrapposto, si faranno altrettanti triangoli simili, quanti sono i lati d'ambidue i poligoni, onde ne riuscirà un solido così inscritto nella sfera; ed ancora in tre circoli uguali, fatti col diametro de' lati d'un triangolo equilatero inscritto nel cerchio maggiore della sfera, e perpendicolari al piano di esso, descrivendo tre poligoni simili, ed uguali, e poscia fatti li triangoli col lato di essi poligoni, e con le rette tirate da' loro termini agli angoli dell'opposto poligono, similmente ne riuscirà un altro solido inscritto nella sfera &c. Ma questi non diconsi solidi regolari, non avendo tutti i piani simili, ed uguali, ma solamente alcuni simili d'una specie, altri d'un'altra.

A V V E R T I M E N T O .

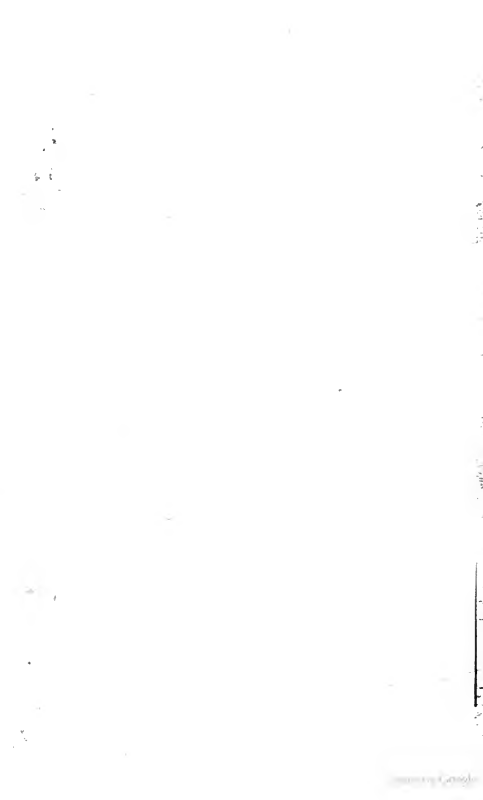
Moltissime altre proprietà de' solidi potrebbero quì aggiungerfi; ma troppo lunghe riuscirebbero queste Istituzioni; siccome ancora delle piane figure potrebbero esporfi molti altri Teoremi, che io ne' miei scritti ho più volte dimostrati; ma non ho stimato bene l'aggiungerli tutti in questo Trattato, che ora finalmente voglio, che sia esattamente il sincero.

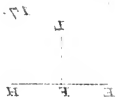
I L F I N E .

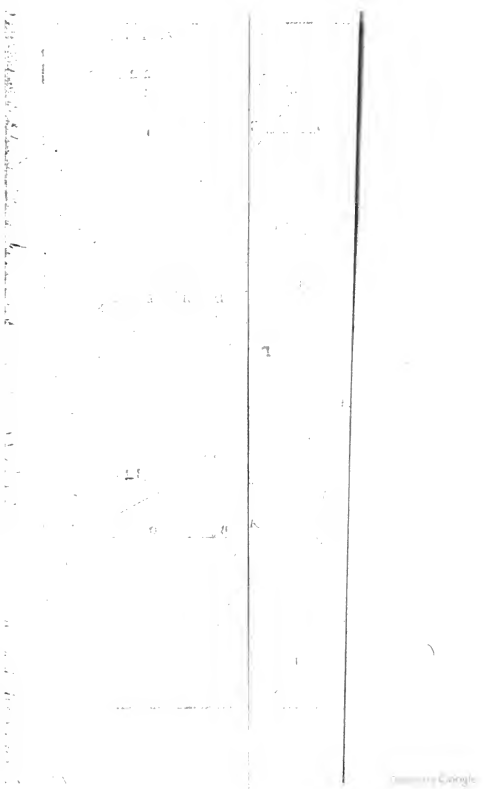
ERRORI

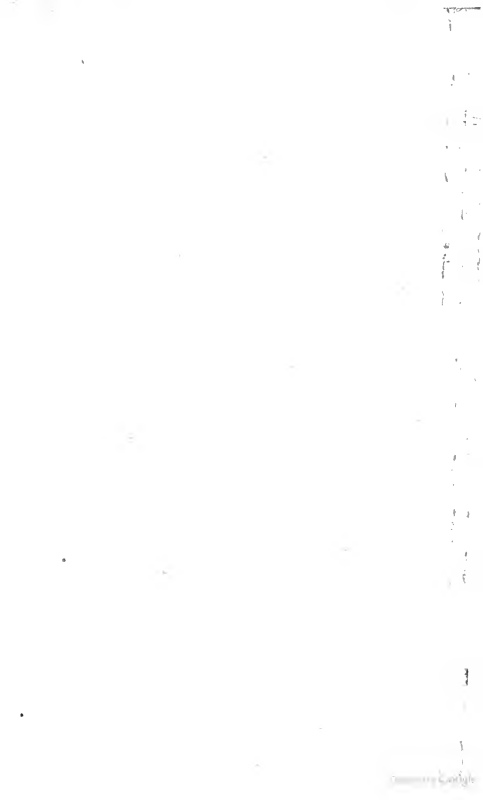
CORREZIONI

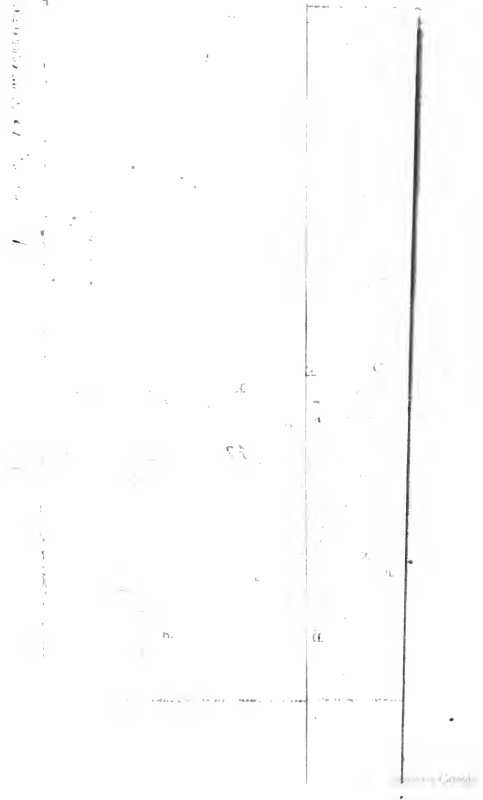
Pag. 35. verso	17. BDF	DBF
43.	2. sono due retti	sono uguali a due retti
59.	31. l'angolo CAL	l'angolo CLA
70.	2. retti angoli	rettangoli
118.	21. dagli	degli
161.	17. altezza AE	altezza ER

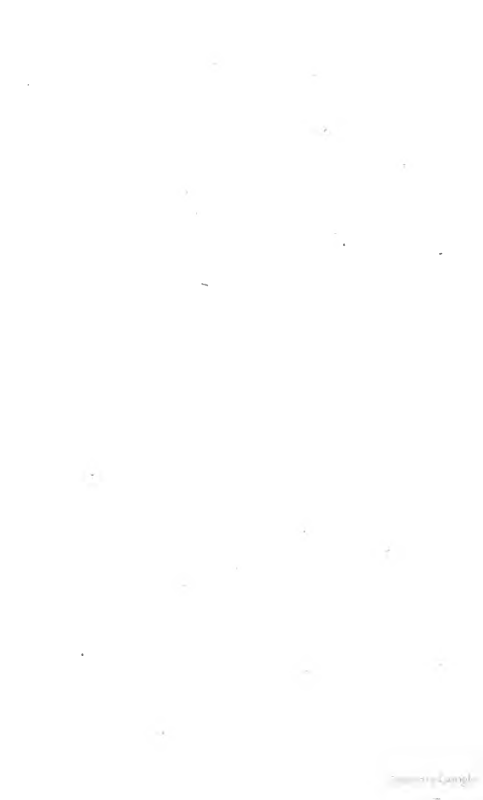


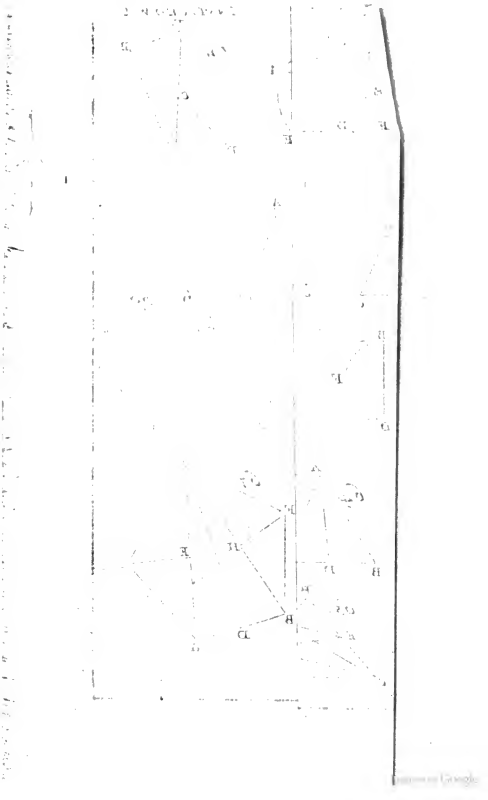


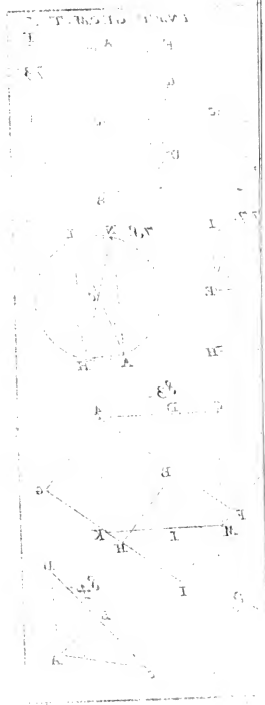












1871

1871

1871

1871

1871

1871

1871

1871

1871



100

100

100

100
100
100
100
100

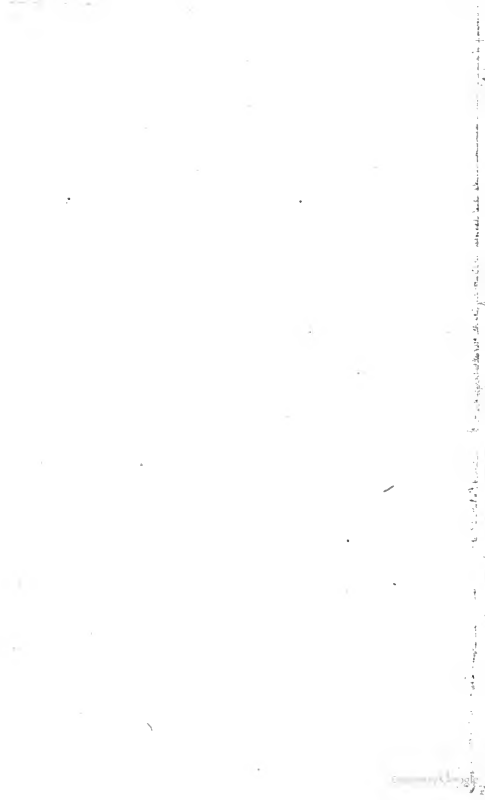
100
100

100
100
100

100
100
100

100
100
100

100
100
100



1870

1870

1870

1870

1870

1870

1870

1870

1870

1870

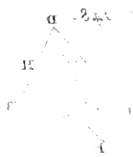
1870



Fig. 1



Fig. 2





THEORY OF



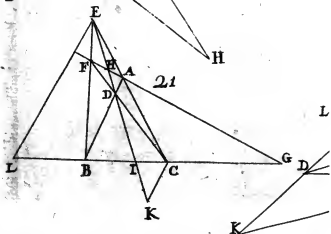
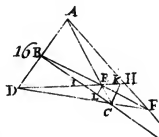
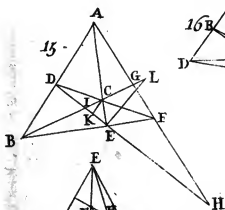
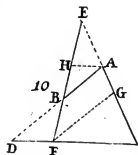
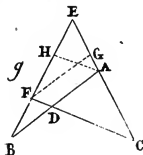
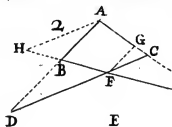
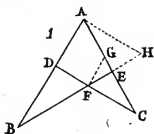
1

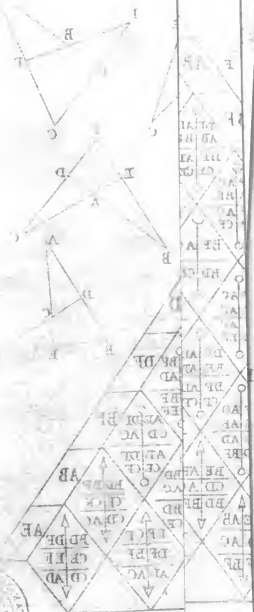
A

A

11







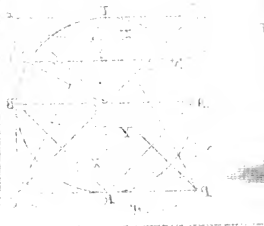
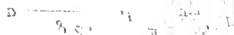


12





1.



34 253

